UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

BINDING LIST JAN 1 1922.

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s4nouvellesannal20pari

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

DIRIGÉ PAR

C.-A. LAISANT,
Docteur ès Sciences,
Ancien Examinateur d'admission
à l'École Polytechnique.

R. BRICARD,
Professeur au Conservatoire national
des Arts et Métiers,
Examinateur des Élèves à l'École Polytechnique.

A. BOULANGER,
Professeur au Conservatoire national des Arts et Métiers,
Répétiteur et Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR PROUHET, BOURGET, BRISSE, ROUCHÉ, ANTOMARI,
DUPORCQ ET BOURLET.

QUATRIÈME SÉRIE.

TOME XX.

(LXXIXe VOLUME DE LA COLLECTION)

169348.
14.2.22.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1920

GA
1
N8
v. 79

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation
réservés pour tous pays.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

[R8e]

EXPOSÉ ÉLÉMENTAIRE D'UNE THÉORIE RIGOUREUSE DES LIAISONS FINIES UNILATÉRALES;

PAR M. ÉT. DELASSUS.

Je me propose d'exposer ici, au point de vue pédagogique, c'est-à-dire sous une forme élémentaire et contenant le moins possible de développements analytiques, une théorie dont la première idée se trouve dans mes *Leçons sur la dynamique des systèmes matériels*, et que j'ai ensuite perfectionnée et complétée dans un Mémoire publié en 1917 dans les *Annales de l'École Normale*.

La théorie rigoureuse, ainsi exposée de façon à être accessible aux candidats à la licence et à l'agrégation, et donnant toujours sans impossibilité ni indétermination la solution conforme à l'expérience, leur permettra d'abandonner les théories *implicites* couramment admises, basées sur une accumulation de principes successifs considérés comme *évidents* et qui, sauf dans des cas particuliers convenablement choisis, conduisent à des résultats faux dont certains sont même en contradiction absolue avec l'expérience la plus grossière.

1. Nous ne chercherons pas ici à préciser, d'une façon analytique parfaite, la notion de liaison unilatérale. Nous bornant, pour simplifier, au cas d'une liaison *finie*, *unilatérale*, *indépendante du temps et non surabondante*, nous nous contenterons de dire qu'elle est, *en général*, définie par un certain nombre d'équations distinctes

$$F_1(q) = 0, \qquad \ldots, \qquad F_i(q) = 0,$$

et que son côté libre ou, par abréviation, côté positif, est défini par les inégalités *simultanées*

$$F_1(q) \geqq 0, \qquad \ldots, \qquad F_i(q) \geqq 0.$$

2. Le système matériel partant d'une position sur cette liaison sera lancé du côté positif si les fonctions F, nulles initialement, deviennent positives; donc si leurs dérivées premières initiales sont positives,

$$\frac{dF_1}{dt} = \varphi_1(q') + a_1 > 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{dF_i}{dt} = \varphi_i(q') + a_i > 0.$$

Le système matériel étant *lancé sur la liaison* prendra un mouvement du côté positif si les fonctions F, nulles initialement, ainsi que leurs dérivées premières, deviennent positives; donc, si leurs dérivées secondes initiales sont positives,

$$\frac{d^2F_1}{dt^2} = \varphi_1(q'') + b_1 > 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{d^2F_i}{dt^2} = \varphi_i(q'') + b_i > 0,$$

conditions que l'on met sous une forme plus commode en introduisant le mouvement du même système sous l'action des mêmes forces et en partant des mêmes conditions initiales, mais en suivant la liaison considérée comme liaison forcée. Ce mouvement donnera à l'ins-

tant initial

$$\varphi_1(q'') + b_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_i(q'') + b_i = 0,$$

les b étant les mêmes que dans l'autre, de sorte qu'en désignant par $p_1, p_2, \ldots$ les variations subies par les valeurs initiales des q'' quand on passe du second mouvement au premier, les conditions précédentes prendront la forme simple

$$\varphi_1(p) > 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_i(p) > 0.$$

3. Proposons-nous de déterminer les p du mouvement libre, c'est-à-dire du mouvement pris par le système lancé sur la liaison, mais en supposant cette liaison *non réalisée matériellement* de façon qu'elle ne constitue aucune gêne au mouvement.

Le mouvement sur la liaison totale considérée comme liaison forcée est donné par l'équation de Dalembert [1]

$$\Sigma(P + Q)\omega + \Sigma\mu\varphi(\omega) \equiv 0,$$

et les équations de la liaison, inutiles à écrire ici.

Le mouvement libre donnera l'équation analogue

$$\Sigma(P + Q)\omega \equiv 0,$$

et si nous nous plaçons à l'instant initial en remarquant que les forces, les q et les q' sont alors les mêmes, nous

---

[1] Pour simplifier les calculs, nous supposons que le système, débarrassé de la liaison unilatérale considérée, est holonome et défini par des paramètres indépendants. En outre, nous écrivons l'équation de Dalembert en mettant les ω au lieu des δ_q de façon à supprimer la signification mécanique, gênante pour les raisonnements ultérieurs, de ces variables d'identification.

obtiendrons par soustraction

$$\sum \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial p} \omega + \Sigma \mu \varphi(\omega) \equiv 0,$$

nouvelle équation de même forme faisant connaître les p au moyen de la réaction totale $\mu_1, \mu_2, \ldots$ définie par son travail virtuel $\Sigma \mu \varphi(\delta q)$ et dans laquelle $\mathfrak{T}$ n'est autre que la portion T_2 de la force vive.

4. Les p ainsi obtenus sont des fonctions linéaires et homogènes de $\mu_1, \ldots, \mu_i$; donc il en est de même des expressions $\varphi(p)$,

$$\varphi_1(p) = \Phi_1(\mu), \qquad \ldots, \qquad \varphi_i(p) = \Phi_i(\mu),$$

et ces fonctions $\Phi(\mu)$ ont la propriété remarquable d'être les dérivées partielles d'une même fonction.

Pour le voir, désignons par $x_1, x_2, \ldots$ les dérivées des p par rapport à un des μ, μ_1 par exemple, et par $y_1, y_2, \ldots$ leurs dérivées par rapport à un autre des μ, μ_2 par exemple. On aura

$$\sum \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x} \omega + \varphi_1(\omega) \equiv 0, \qquad \text{donc} \qquad \sum \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x} y + \varphi_1(y) = 0,$$

$$\sum \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial y} \omega + \varphi_2(\omega) \equiv 0, \qquad \text{donc} \qquad \sum \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial y} x + \varphi_2(x) = 0;$$

donc la suite d'égalités

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \mu_2} = \varphi_1\left(\frac{\partial p}{\partial \mu_2}\right) = \varphi_1(y) = -\sum \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial x} y = -\sum \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial y} x$$
$$= \varphi_2(x) = \varphi_2\left(\frac{\partial p}{\partial \mu_1}\right) = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \mu_1},$$

ce qui démontre la propriété.

On arrive ainsi à une forme quadratique homo-

gène $W(\mu)$ telle que

$$\varphi_1(p) = \Phi_1(\mu) = -\frac{\partial W}{\partial \mu_1}, \quad \ldots, \quad \varphi_i(p) = \Phi_i(\mu) = -\frac{\partial W}{\partial \mu_i}.$$

Mais l'équation aux p donne, en y remplaçant les ω par les p,

$$\sum \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial p} p = -\Sigma \mu \varphi(p) = \Sigma \mu \frac{\partial W}{\partial \mu},$$

ou, plus simplement, puisque $\mathfrak{T}$ et W sont quadratiques et homogènes,

$$2\mathfrak{T} = 2W.$$

La fonction $2W$, étant la transformée de $2\mathfrak{T}$, est donc, comme elle, *essentiellement positive*.

5. Pratiquement, les équations aux p sont les équations du mouvement réduites aux seuls termes contenant les q'' et les réactions, en y remplaçant les q'' par les $-p$. Donc on ne sera pas obligé de s'astreindre à la forme de Lagrange, qui n'est pas la plus commode dans ce cas; on formera ces équations par un procédé quelconque, on en tirera les q'' et on les substituera aux q' dans la portion T_2 de la force vive, le fait de substituer les q'' au lieu des $-q''$ n'ayant aucune importance, puisque T_2 est quadratique homogène.

LIAISONS UNILATÉRALES SIMPLES.

6. C'est le cas $i = 1$.

Le système, étant lancé sur cette liaison simple A, va la suivre : mouvement M_A, ou ne va pas la suivre : mouvement libre M_l.

On a

$$2W(\mu) = A\mu^2, \qquad A > 0.$$

Pour que M_ℓ ait lieu du côté libre, il faut

$$\varphi(p) = -\frac{\partial W}{\partial \mu} = -A\mu > 0, \qquad \text{donc} \qquad \mu < 0,$$

donc encore

$$\mu\,\varphi(\delta q) < 0,$$

pour tous les déplacements virtuels ayant lieu du côté positif $\varphi(\delta q) > 0$. C'est la définition de la réaction négative.

Supposons la réaction positive. Le mouvement qui se produit est M_A ou M_ℓ. Or M_ℓ ne peut se produire, car il aurait lieu du côté négatif et la réalisation matérielle de la liaison s'y oppose, de sorte que, par exclusion et sans faire intervenir aucun principe expérimental, on voit que c'est le mouvement M_A qui se produit effectivement.

Supposons la réaction négative. Le mouvement M_ℓ n'est pas impossible, mais l'expérience montre (par exemple une bille pesante lancée sur la face inférieure d'un plan incliné) que c'est toujours lui qui se produit effectivement.

Nous avons ainsi la solution du problème de *l'échappement au départ* au moyen du signe de la réaction.

Supposons qu'on trouve au départ le mouvement M_A, donc réaction initiale positive. En décomposant le temps en intervalles infiniment petits, et en appliquant à chacun d'eux le résultat du problème initial, on voit que les mouvements partiels successifs seront toujours des M_A tant que la réaction restera positive, et deviendront des M_ℓ quand, s'annulant, elle deviendra négative. Il y aura donc *échappement pendant le mouvement* quand la réaction passera du positif au négatif.

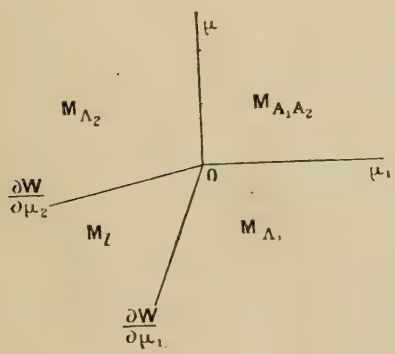
LIAISONS UNILATÉRALES DOUBLES.

7. On a ici $i = 2$, et la liaison totale se décompose en deux liaisons unilatérales simples A_1, A_2. Le système matériel ne pourra que suivre ces deux liaisons : mouvement $M_{A_1 A_2}$; n'en suivre qu'une : mouvement M_{A_1} ou M_{A_2}; ou enfin n'en suivre aucune : mouvement libre M_l. Quel est celui de ces quatre mouvements qui se produit effectivement ?

Nous allons commencer par chercher, en représentant la réaction μ_1, μ_2 par le point de coordonnées rectangulaires μ_1, μ_2, la *région de possibilité* M_l du mouvement libre.

On a ici

$$W(\mu) = A_1 \mu_1^2 + 2B \mu_1 \mu_2 + A_2 \mu_2^2,$$
$$A_1 > 0, \qquad A_2 > 0, \qquad B^2 - A_1 A_2 < 0;$$



donc les deux conditions de possibilité

$$\varphi_1(p) = -\frac{\partial W}{\partial \mu_1} = -2(A_1 \mu_1 + B \mu_2) > 0,$$
$$\varphi_2(p) = -\frac{\partial W}{\partial \mu_2} = -2(B \mu_1 + A_2 \mu_2) > 0$$

définissant M_l comme région commune aux côtés négatifs des deux droites

$$\frac{\partial W}{\partial \mu_1} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial \mu_2} = 0.$$

On obtient ainsi l'angle marqué M_l dans la figure ci-contre, les quatre demi-droites $O\mu_1$, $O\mu_2$, $\frac{\partial W}{\partial \mu_2}$, $\frac{\partial W}{\partial \mu_1}$ étant, d'après les inégalités que vérifient les coefficients de W, forcément disposées dans l'ordre indiqué.

8. Cherchons la région de possibilité de M_{Λ_1}. C'est un mouvement sur une liaison unilatérale simple; donc, s'il se produit, sa réaction μ'_1 doit être positive et la liaison Λ_2 ne doit pas le gêner; donc il doit être, de son côté, libre. Les p et μ'_1 de ce mouvement s'obtiendront en prenant les équations initiales

$$\Sigma(P + Q)\omega + \mu'_1 \varphi_1(\omega) \equiv 0,$$
$$\varphi_1(q'') + b_1 = 0,$$

puis, retranchant celles de $M_{\Lambda_1\Lambda_2}$,

$$\Sigma(P + Q)\omega + \mu_1 \varphi_1(\omega) + \mu_2 \varphi_2(\omega) \equiv 0,$$
$$\varphi_1(q'') + b_1 = 0,$$

ce qui donne

$$\sum \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial p}\omega + (\mu_1 - \mu'_1)\varphi_1(\omega) + \mu_2 \varphi_2(\omega) \equiv 0,$$
$$\varphi_1(p) = 0.$$

La première ne diffère de l'équation aux p de M_l que par la substitution de $\mu_1 - \mu'_1 = \xi$ à μ; elle donnera donc

$$\varphi_1(p) = -\frac{\partial W}{\partial \mu_1}(\xi, \mu_2), \qquad \varphi_2(p) = -\frac{\partial W}{\partial \mu_2}(\xi, \mu_2),$$

de sorte qu'on aura l'égalité

$$\frac{\partial W}{\partial \mu_1}(\xi, \mu_2) = 0,$$

donnant ξ, et par conséquent μ'_1, puis les deux inégalités de condition

$$\frac{\partial W}{\partial \mu_2}(\xi, \mu_2) < 0, \qquad \mu'_1 > 0,$$

qui expriment que le point ξ, μ_2, qui est par définition sur la parallèle à l'axe des μ_1 menée par μ_1, μ_2, se trouve sur la droite $\frac{\partial W}{\partial \mu_1}$ dans sa partie du côté négatif de $\frac{\partial W}{\partial \mu_2}$, donc sur celle qui est le côté de M_l, et enfin se trouve à gauche de μ_1, μ_2. On définit ainsi la région marquée M_{Λ_1} sur la figure précédente, et l'on obtiendrait de même la région M_{Λ_2}.

A ces régions nous adjoindrons l'angle $\mu_1 O \mu_2$, que nous désignerons par $M_{\Lambda_1 \Lambda_2}$ (dénomination qui va être justifiée dans le paragraphe suivant) et nous ferons remarquer de suite que, *d'après la nature de la fonction* $W(\mu_1, \mu_2)$ et la disposition résultante des quatre demi-droites, *les quatre régions* $M_{\Lambda_1 \Lambda_2}$, M_{Λ_1}, M_{Λ_2} *et* M_l *remplissent tout le plan sans empiéter les unes sur les autres.*

9. Si $\mu_1 \mu_2$ est dans la région $M_{\Lambda_1 \Lambda_2}$, il ne se trouve dans aucune des trois autres; donc les trois mouvements M_{Λ_1}, M_{Λ_2}, M_l sont impossibles, de sorte que c'est forcément $M_{\Lambda_1 \Lambda_2}$ qui se produit effectivement.

Si $\mu_1 \mu_2$ est dans une des trois régions M_{Λ_1}, M_{Λ_2}, M_l, il est dans une seule d'entre elles; donc, parmi les trois mouvements réduits, il y en a deux qui sont impossibles, et nous ne pouvons hésiter, comme mouvement effectif, qu'entre $M_{\Lambda_1 \Lambda_2}$ et le mouvement réduit de la région où se trouve $\mu_1 \mu_2$. Or l'expérience montre (par exemple bille pesante à l'intérieur d'un angle vertical et partant de son sommet) que c'est toujours ce mouvement réduit qui se produit effectivement.

Il résulte de là que *les régions* $M_{\Lambda_1\Lambda_2}$, M_{Λ_1}, M_{Λ_2}, M_l, *trouvées comme régions de possibilité des mouvements correspondants sont les régions de production effective de ces mouvements*, et la propriété indiquée plus haut de ces régions montre que l'*on obtient ainsi, sans impossibilité ni indétermination, la solution du problème de l'échappement initial.*

10. Supposons qu'on parte avec $M_{\Lambda_1\Lambda_2}$, donc $\mu_1\mu_2$, dans la région $M_{\Lambda_1\Lambda_2}$; le mouvement $M_{\Lambda_1\Lambda_2}$ ne cessera que quand $\mu_1\mu_2$ sortira de cette région et la région dans laquelle il entrera indiquera le genre d'échappement qui se produira.

Il peut sortir en traversant un côté, $O\mu_1$ par exemple ; alors il entrera forcément dans M_{Λ_1}, ce qui revient à dire que, si une seule des deux réactions devient négative, il y a échappement de la liaison correspondante, résultat admis couramment comme évident.

Le point $\mu_1\mu_2$ peut aussi sortir de $M_{\Lambda_1\Lambda_2}$ par le point O et alors notre figure montre qu'il ne passe pas forcément dans M_l, c'est-à-dire que, si les réactions de deux contacts viennent s'annuler simultanément en changeant de signe, il n'y a pas forcément cessation de ces deux contacts ; contrairement à l'idée courante, il peut très bien arriver que l'un d'eux cesse et que l'autre persiste.

Ce fait peut aussi se produire à l'instant initial, quand μ_1 et μ_2 sont tous deux négatifs, et, dans le même ordre d'idées, nous devons signaler un autre fait contraire aux idées courantes, mais qui, cette fois, ne peut se produire qu'au départ. Si l'une des deux réactions initiales, μ_1 par exemple, est négative et l'autre positive, ou ne se trouve pas forcément dans la région M_{Λ_1}, ou peut très bien se trouver dans M_l, de sorte qu'il

peut y avoir échappement total à l'instant initial bien qu'une seule réaction partielle soit négative.

LIAISONS UNILATÉRALES TRIPLES.

11. On a ici $i = 3$ et la liaison se compose de trois liaisons unilatérales simples A_1, A_2, A_3 et, dans son mouvement, le système matériel suivra ces trois liaisons : mouvement $M_{A_1 A_2 A_3}$, ou bien n'en suivra que deux : mouvement $M_{A_1 A_2}$ ou $M_{A_2 A_3}$ ou $M_{A_3 A_1}$, ou bien n'en suivra qu'une : mouvement M_{A_1} ou M_{A_2} ou M_{A_3}, ou bien enfin n'en suivra aucune : mouvement libre M_l.

Quel est celui de ces huit mouvements qui va se produire effectivement? W est ici une forme quadratique à trois variables μ_1, μ_2, μ_3, et, si nous représentons la réaction par le point de coordonnées rectangulaires μ_1, μ_2, μ_3, on sera conduit, par des calculs analogues à ceux de la section précédente, aux résultats suivants qu'on admettra facilement par analogie sans que nous soyons obligés d'en donner la démonstration.

La région $M_{A_1 A_2 A_3}$ sera le trièdre $O\mu_1\mu_2\mu_3$, et la région M_l la portion commune aux côtés négatifs des trois plans

$$\frac{\partial W}{\partial \mu_1} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial \mu_2} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial \mu_3} = 0.$$

On aura ainsi deux trièdres tels que chaque arête de l'un corresponde à une face de l'autre. La région $M_{A_1 A_2}$ sera le trièdre joignant la face $O\mu_1\mu_2$ à l'arête correspondante de M_l, et la région M_{A_1} le trièdre joignant $O\mu_1$ à la face correspondante de M_l.

Les huit trièdres ainsi définis rempliront complète-

ment l'espace sans empiéter les uns sur les autres, par suite de la propriété de W d'être essentiellement positive.

Si $\mu_1 \mu_2 \mu_3$ est dans $M_{A_1 A_2 A_3}$, aucun des sept mouvements réduits n'est possible; donc c'est le mouvement $M_{A_1 A_2 A_3}$ qui se produit effectivement,

Si $\mu_1 \mu_2 \mu_3$ est dans une des sept autres régions, il est dans une seule d'entre elles; tous les mouvements réduits autres que celui, M', qui correspond à la région considérée sont impossibles. Il n'y a donc à hésiter qu'entre $M_{A_1 A_2 A_3}$ et M'.

Or, l'expérience montre (par exemple bille pesante à l'intérieur d'un trièdre et partant de son sommet) que c'est toujours ce mouvement réduit qui se produit effectivement, de sorte que *les régions trouvées comme régions de possibilité sont les régions de production effective des divers mouvements.*

C'est la solution complète *sans impossibilité ni indétermination* du problème de l'échappement initial.

Si l'on part avec le mouvement $M_{A_1 A_2 A_3}$, donc avec μ_1, μ_2, μ_3, dans la région $M_{A_1 A_2 A_3}$, ce mouvement cessera quand le point sortira de cette région, et la région dans laquelle il passera indiquera le genre d'échappement qui se produira. En particulier, si une seule réaction partielle s'annule en changeant de signe, il y a forcément échappement simple de la liaison correspondante, car la sortie par traversée de la face $O\mu_1\mu_2$, par exemple, fait forcément entrer dans $M_{A_1 A_2}$. Si la sortie s'effectue par une arête ou par le sommet, on ne sait pas *a priori* dans quelle région on entre et l'on peut être conduit à des résultats qui, quoique conformes à l'expérience, sont en contradiction complète avec les idées courantes. (*A suivre.*)

[$M^2 4i\gamma$]

SIMPLE REMARQUE SUR LA CYCLIDE DE DUPIN;

PAR M. M. D'OCAGNE.

La cyclide de Dupin est, comme on sait, une surface du quatrième ordre, enveloppe à la fois de deux systèmes de sphères (S_1) et (S_2) qui la touchent suivant les systèmes de cercles (C_1) et (C_2) constituant ses lignes de courbure. Les courbes (γ_1) et (γ_2), lieux des centres γ_1 et γ_2 de ces sphères, forment par leur ensemble la développée de la cyclide et sont, par suite, rencontrées chacune par toutes les normales de cette surface.

On peut très aisément reconnaître quelle est la nature de ces courbes (γ_1) et (γ_2) au moyen de la simple remarque que voici : tous les cônes de normales Γ_1, de sommets γ_1 et ayant pour directrices les cercles C_1 correspondants, passent aussi nécessairement par (γ_2); cette courbe ne saurait être une biquadratique gauche, car par une telle ligne ne passent que quatre cônes du second ordre, ni une cubique gauche, car celle-ci passant par le sommet de tout cône qui la contient, il y aurait coïncidence des courbes (γ_1) et (γ_2) et, par suite, des systèmes (S_1) et (S_2) supposés distincts; ce ne peut donc être qu'une conique. De plus, les cônes Γ_1 étant de révolution, la courbe (γ_1) est le lieu des sommets des cônes de révolution passant par (γ_2); et *vice versa*, par le même raisonnement.

Les courbes (γ_1) et (γ_2) constituent donc, ainsi qu'il est bien connu, un couple de *coniques focales*

dans l'espace, c'est-à-dire de coniques situées dans deux plans rectangulaires et telles que les sommets de chacune d'elles coïncident avec les foyers de l'autre. L'une de ces coniques (γ_1) est une ellipse, l'autre (γ_2) une hyperbole. Lorsque (γ_1) devient un cercle, (γ_2) se réduit à l'axe de ce cercle, c'est-à-dire à la perpendiculaire à son plan, menée par son centre, et la cyclide correspondante est alors un tore de révolution autour de cet axe (γ_2) et admettant le cercle (γ_1) comme lieu des centres de ses méridiens.

[M¹3g]

LIEUX DES FOYERS ORDINAIRES DES COURBES ALGÉBRIQUES D'UN FAISCEAU TANGENTIEL OU PONCTUEL ;

PAR M. T. LEMOYNE.

Considérons les courbes (C), de classe n, appartenant à un système de caractéristiques (μ, ν), c'est-à-dire telles qu'il y a μ courbes analogues passant par un point quelconque et ν autres courbes analogues touchant une droite quelconque. Cherchons le lieu du point d'intersection des tangentes qu'on peut mener aux courbes (C) par deux points fixes P et Q.

L'ordre de ce lieu est égal au nombre des points du lieu situés sur une droite quelconque, par exemple sur une droite Δ passant en P. Supposons que les courbes (C) n'admettent pas PQ pour tangente commune et ne passent par aucun point fixe de cette droite.

Il y a ν courbes (C) tangentes à la droite PQ et ν seulement. Pour chacune de ces ν courbes, le point P est $(n-1)$ fois point de rencontre de la tangente QP

et des $(n-1)$ tangentes autres que PQ que l'on peut mener de P à cette courbe, par conséquent le lieu passe $\nu(n-1)$ fois en P; autrement dit, le point P est point multiple d'ordre $\nu(n-1)$ du lieu. Il en est évidemment de même du point Q.

D'autre part, il y a ν courbes (C) tangentes à la droite PΔ; les $n\nu$ tangentes qu'on peut leur mener du point Q rencontrent encore PΔ en $n\nu$ points du lieu, et il n'y en a pas d'autres sur PΔ.

On en conclut que le lieu cherché est une courbe d'ordre $\nu(2n-1)$, qui admet P et Q pour points multiples d'ordre $\nu(n-1)$ et coupe d'ailleurs encore la droite PQ aux ν points où elle est touchée par les ν courbes (C) qui lui sont tangentes.

Nous pouvons donc dire que :

1. *Si de deux points fixes* P, Q *on mène les tangentes aux courbes de classe n qui appartiennent à un système de caractéristiques* (μ, ν) *et qui, de plus, n'admettent pas* PQ *pour tangente commune et ne passent par aucun point fixe de cette droite, le lieu des points d'intersection de ces tangentes est une courbe d'ordre* $\nu(2n-1)$ *admettant les points* P *et* Q *pour points multiples d'ordre* $\nu(n-1)$.

Prenons pour points P et Q les points cycliques du plan, les points d'intersection des tangentes sont foyers ordinaires des courbes (C), donc :

2. *Le lieu des foyers des courbes de classe n appartenant à un système de caractéristiques* (μ, ν), *ne touchant pas toutes la droite de l'infini et n'ayant pas leurs directions asymptotiques données, est une courbe d'ordre* $\nu(2n-1)$ *admettant les points cycliques pour points multiples d'ordre* $\nu(n-1)$.

Lorsque $\nu = 1$, les courbes (C) appartiennent à un faisceau tangentiel. Par suite :

3. *Le lieu des foyers d'un faisceau tangentiel de courbes de classe n, non tangentes à la droite de l'infini, est une courbe d'ordre $2n - 1$ qui admet les points cycliques pour points multiples d'ordre $n - 1$.*

En particulier :

Le lieu des foyers d'un faisceau tangentiel de coniques à centre est une cubique circulaire.

Supposons maintenant que les courbes (C) appartenant à un système (μ, ν) soient les courbes d'ordre m d'un faisceau ponctuel. On sait que dans un faisceau ponctuel de courbes d'ordre m, il y a $2(m - 1)$ courbes tangentes à une droite quelconque ; on a donc $\nu = 2(m - 1)$ et, comme la classe n des courbes (C) est égale à $m(m - 1)$, on en conclut que le lieu des foyers de ces courbes est d'ordre

$$\nu(2n - 1) = 2(m - 1)[2m(m - 1) - 1].$$

Ainsi :

4. *Le lieu des foyers des courbes d'ordre m appartenant à un faisceau ponctuel et n'ayant aucune direction asymptotique donnée est une courbe d'ordre $2(m - 1)[2m(m - 1) - 1]$ qui admet les points cycliques pour points multiples d'ordre $2(m - 1)[m(m - 1) - 1]$.*

En particulier :

Le lieu des foyers des coniques d'un faisceau ponctuel, n'ayant aucune direction asymptotique donnée, est une sextique bicirculaire.

Si dans le théorème 2 on fait $n = 2$, on obtient le théorème suivant, dû à Chasles [1] :

Le lieu des foyers des coniques d'un système (μ, ν) *qui ne touchent pas la droite de l'infini et n'ont pas leurs directions asymptotiques données est une courbe d'ordre* 3ν *admettant les points cycliques pour points multiples d'ordre* ν.

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Bordeaux.

Épreuve théorique. — I. *Méthode d'intégration de l'équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre*

$$Ap + Bq = C,$$

où A, B, C *sont des fonctions données de* x, y, z.

Application. — Intégrale *générale de*

$$xzp + yzq = x^2 + y^2 + 2z^2.$$

Surface intégrale particulière contenant la courbe

$$z = 0, \qquad x^2 + y^2 = R^2.$$

Solution. — L'application de la méthode classique conduit aux équations différentielles ordinaires

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{z\,dz}{x^2 + y^2 + 2z^2} = \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2},$$

---

[1] *Voir* Brocard et Lemoyne, *Courbes géométriques remarquables*, t. I, p. 270.

donnant les deux intégrales

$$\frac{y}{x} = \text{const.}, \qquad \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2)^2} = \text{const.}$$

L'intégrale générale est ainsi

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2)^2} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

et l'intégrale particulière est

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{1}{R^2}.$$

II. *On donne une courbe gauche* (C) *pour laquelle les coordonnées d'un de ses points* M *sont des fonctions connues de l'arc* AM *de la courbe, compté à partir d'un point fixe* A *de la courbe. On mène en* M, *à la courbe* (C), *la tangente* Mξ, *la normale principale* Mη *et la binormale* Mζ *dans les sens habituels. Soit u une fonction déterminée de l'arc* AM. *On mène la droite* MD *dont les paramètres directeurs par rapport à* Mξ, Mη, Mζ *sont* $(1, 1, u)$. *Cette droite* MD *engendre une surface réglée* (Σ) *lorsque le point* M *se déplace sur la courbe* (C). *On demande :*

1° *Comment on doit choisir la fonction u pour que la courbe* (C) *soit ligne de striction pour la surface* Σ. *On montrera que la solution de cette question s'obtient par quadratures.*

2° *Comment on doit choisir la fonction u pour que la surface* (Σ) *soit développable. On montrera que la solution de cette question dépend d'une équation de Riccati. Peut-on intégrer cette équation lorsque la courbe* (C) *est une hélice quelconque?*

Solution. — Par rapport aux axes Mξ, Mη, Mζ, le plan tangent en M à Σ est

$$\eta u - \zeta = 0.$$

Pour avoir le plan tangent à Σ au point à l'infini sur MD, il faut prendre le plan tangent au cône directeur décrit par la droite dont les paramètres directeurs dans des axes fixes

sont

$$\lambda = \alpha + \alpha' + \alpha'' u, \qquad \mu = \beta + \beta' + \beta'' u, \qquad \nu = \gamma + \gamma' + \gamma'' u.$$

Les coefficients de ce plan seront $\frac{d\lambda}{ds}, \frac{d\mu}{ds}, \frac{d\nu}{ds}$ ou, par application des formules de Frenet et en revenant aux axes mobiles,

$$-\frac{1}{R}, \frac{1}{R} + \frac{u}{T}, -\frac{1}{T} + \frac{du}{ds}.$$

On aura ainsi le plan tangent cherché à Σ :

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ 1 & 1 & u \\ -\frac{1}{R} & \frac{1}{R} + \frac{u}{T} & -\frac{1}{T} + \frac{du}{ds} \end{vmatrix} = 0.$$

La courbe (C) sera ligne de striction si ces deux plans tangents sont rectangulaires, ce qui donne une équation linéaire en u^2.

La surface Σ sera développable s'ils sont confondus; on est ainsi conduit à une équation de Riccati dans laquelle les variables se séparent quand (C) est une hélice, parce qu'alors le rapport $\frac{R}{T}$ est constant.

Épreuve pratique. — *Calculer, en appliquant le théorème des résidus, l'intégrale*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{5 + 4\cos x}\, dx.$$

Solution. — Posant $t = e^{ix}$, l'intégrale devient

$$I = -\frac{i}{8}\int \frac{(t^2+1)^3 + i(t^2-1)^3}{t^3[2t^2+5t+2]}\, dt,$$

prise le long d'une circonférence de rayon 1, ayant l'origine pour centre. Sa fonction admet, à l'intérieur de ce cercle, le pôle $t = 0$ de résidu $\frac{33 - 9i}{8}$ et le pôle $t = -\frac{1}{2}$ de résidu $-\frac{125}{24} + \frac{9i}{8}$. On en déduit pour I la valeur $-\frac{13\pi}{48}$.

(Bordeaux, juin 1919.)

Épreuve théorique. — I. *Étant donnés trois axes rectangulaires et une surface* S, *d'un point quelconque* M *de cette surface, on abaisse des perpendiculaires* MP, MQ, *sur* Ox *et* Oy. *Former l'équation aux dérivées partielles à laquelle doit satisfaire la surface* S *pour que la normale* MN *à cette surface soit contenue dans le plan* PMQ, *quel que soit le point* M *pris sur la surface* S. *Intégrer l'équation obtenue. Déterminer la surface* S *qui contient la droite* $x = 0$, $y = z$.

Solution. — On arrive immédiatement à l'équation linéaire aux dérivées partielles

$$\frac{p}{x} + \frac{q}{y} + \frac{1}{z} = 0$$

dont l'intégrale générale s'obtient facilement,

$$2z^2 = -x^2 - y^2 + f(x^2 - y^2),$$

et donne l'intégrale particulière demandée

$$z^2 - y^2 + 2x^2 = 0.$$

II. *On donne en coordonnées rectangulaires une surface réglée* S *ayant pour équations*

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta, \qquad z = V + \rho W,$$

ρ *et* θ *étant deux paramètres indépendants et* V, W *deux fonctions données du seul paramètre* θ. *On demande :*

1° *De former l'équation différentielle des lignes asymptotiques de cette surface et de montrer qu'elle s'intègre par quadrature.*

2° *Comment il faut choisir la fonction* W *pour que les lignes asymptotiques, autres que les génératrices, se projettent sur le plan des* xy *suivant des courbes homothétiques entre elles par rapport à l'origine des coordonnées. Montrer que la surface* S *est, dans ce cas, un conoïde. Pouvait-on prévoir géométriquement ce résultat?*

Solution. — 1° On a, pour les lignes asymptotiques,

l'équation de Bernoulli

$$2\frac{dV}{d\theta}\frac{d\rho}{d\theta} - \rho\frac{d^2V}{d\theta^2} - \rho^2\left[W + \frac{d^2W}{d\theta^2}\right] = 0$$

qui s'intègre en posant $u = \frac{1}{\rho}$ et donne ainsi

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{\frac{dV}{d\theta}}}\left[C - \int \frac{W + \frac{d^2W}{d\theta^2}}{2\sqrt{\frac{dV}{d\theta}}}\,d\theta\right].$$

2° Il faut que l'équation différentielle ne change pas quand on multiplie ρ par une constante, donc que

$$W + \frac{d^2W}{d\theta^2} = 0 \qquad \text{ou} \qquad W = a\cos\theta + b\sin\theta,$$

et la surface est un conoïde dont les génératrices rencontrent Ox et sont parallèles au plan $z = ax + by$.

Géométriquement : les projections sur le plan des xy forment une famille de courbes homothétiques comprenant ainsi, comme ligne particulière, la droite de l'infini. De sorte que le point à l'infini sur une génératrice rectiligne variable décrit une ligne asymptotique.

Cette courbe à l'infini de S admet en chaque point comme plan osculateur le plan de l'infini en tant que ligne dans le plan de l'infini et le plan tangent à S en tant que ligne asymptotique de cette surface. Comme ces deux plans sont distincts, c'est une ligne à plan osculateur indéterminé, c'est-à-dire une droite; la surface est une surface réglée à plan directeur, et, comme toutes les génératrices rencontrent Oz, c'est forcément un conoïde.

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale de variable complexe*

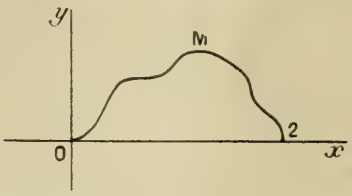
$$\int_0^2 \frac{dz}{(z^2-1)\sqrt{2z-1}}$$

prise le long d'un chemin situé tout entier dans le premier angle des axes de coordonnées. Dans le résultat final on mettra en évidence la partie réelle et la partie imaginaire.

Solution. — On effectue le changement de variable

$$\sqrt{2z-1} = t$$

et l'on calcule la fonction primitive. En prenant i comme



détermination initiale de $\sqrt{2z-1}$, on trouve pour valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{2}\mathrm{L}(2-\sqrt{3}) - \frac{\pi}{4\sqrt{3}} + i\left[\frac{1}{2\sqrt{3}}\mathrm{L}(2+\sqrt{3}) - \frac{\pi}{4}\right].$$

(Bordeaux, novembre 1919.)

Lille.

Épreuve théorique. — I. *A quelle relation doivent satisfaire les deux coefficients p et q de l'équation différentielle linéaire du second ordre $y'' + py' + qy = 0$ pour que cette équation admette deux intégrales dont le quotient soit égal à la variable x? Former toutes les équations de l'espèce considérée, satisfaisant à la condition précédente, et telles de plus que le coefficient q soit constant. Indiquer les équations obtenues.*

II. *Quelle doit-être la forme de la fonction*

$$f(x, y, z, p, q)$$

pour que le système différentiel formé pour l'application de la méthode de Lagrange et Charpit à l'équation aux dérivées partielles $f = 0$ admette l'intégrale première

$$px + qy = \text{const.}?$$

Solution. — I. La relation demandée est

$$p^2 + 2p' = 4q.$$

Les équations correspondant à q constant sont

$$y'' + 2\sqrt{q}\coth(x+\alpha)\sqrt{q}\,y' + qy = 0,$$

et leur intégrale générale est

$$y = \frac{(A + Bx)}{\operatorname{sh}(x+\alpha)\sqrt{q}},$$

α, A et B étant des constantes.

II. Il faut et il suffit que la fonction f satisfasse à l'équation linéaire homogène aux dérivées partielles du premier ordre

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + (px + qy)\frac{\partial f}{\partial z} - p\frac{\partial f}{\partial p} - q\frac{\partial f}{\partial q} = 0.$$

La forme la plus générale de cette fonction est

$$f = F\left(xe^{-\frac{z}{px+qy}},\ ye^{-\frac{z}{px+qy}},\ pe^{\frac{z}{px+qy}},\ qe^{\frac{z}{px+qy}}\right).$$

Épreuve pratique. — I. *Calculer l'intégrale définie*

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^5}.$$

II. *La fonction* $y = \tang x$ *satisfait à l'équation différentielle* $y' = y^2 + 1$; *calculer au moyen de cette équation les cinq premiers coefficients différents de zéro du développement en série de* $\tang x$ *suivant les puissances de* x *au voisinage de* $x = 0$.

Solution. — I. On sait qu'on a

$$\int_0^\infty \frac{t^{a-1}\,dt}{1+t} = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

a étant compris entre 0 et 1. Remplaçons t par x^5 :

$$5\int_0^\infty \frac{x^{5a-1}\,dx}{1+x^5} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Pour $a = \frac{1}{5}$, on obtient

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^5} = \frac{\pi}{5\sin\frac{\pi}{5}}.$$

II. Pour $x = 0$, on a $y_0 = 0$, $y'_0 = 1$, et, en général,

$$y_0^{(n+2)} = 2\left[y y^{(n+1)} + \frac{n}{1} y' y^{(n)} + \frac{n(n-1)}{1.2} y'' y^{(n-1)} + \ldots\right]_0.$$

Il vient nécessairement

$$y''_0 = 0, \quad y'''_0 = 2, \quad y_0^{(\mathrm{IV})} = 0, \quad y_0^{(\mathrm{V})} = 2^4,$$
$$y_0^{(\mathrm{VI})} = 0, \quad y_0^{(\mathrm{VII})} = 2^4.17, \quad y_0^{(\mathrm{VIII})} = 0, \quad y_0^{(\mathrm{IX})} = 2^8.31;$$

$$\operatorname{tang} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \ldots.$$

(Lille, juillet 1919.)

Lyon.

Épreuve théorique. — *Soit, en axes rectangulaires, $xy = az$, l'équation d'un paraboloïde hyperbolique. D'un point* M (x, y, z), *on abaisse une droite* D *perpendiculaire sur le plan polaire du point* M *par rapport au paraboloïde. Quelle est l'équation aux dérivées partielles des surfaces* S, *telles que, si* M *est un point de l'une quelconque de ces surfaces* S, *le plan tangent* Π *en* M *à* S *contienne la droite* D *correspondant à* M. *Intégrer cette équation. Courbes caractéristiques. Déterminer la surface intégrale de façon qu'elle contienne la droite $x + y = 1$, $z = b(x - y)$, ($b =$ const.). Lignes asymptotiques de la surface intégrale particulière ainsi obtenue.*

Indications sur la solution. — L'équation aux dérivées partielles cherchée est

$$px + qy + a = 0.$$

La courbe caractéristique qui passe par le point (x, y, z) a

pour équations paramétriques

$$\begin{cases} x_1 = x \operatorname{ch} t + y \operatorname{sh} t, \\ y_1 = x \operatorname{sh} t + y \operatorname{ch} t, \\ z_1 = z - at. \end{cases}$$

La surface intégrale générale a pour équation

$$\frac{z}{a} = f(x^2 - y^2) - \log(x + y),$$

f étant une fonction arbitraire.

Celle qui contient la droite $x = 1 - y$, $z = b(x - y)$ a pour équation $z = b(x^2 - y^2) - a \log(x + y)$.

C'est une surface réglée. Les asymptotiques sont d'abord les génératrices rectilignes

$$\begin{cases} x + y = C, \\ z = bC(x - y) - a \log C, \end{cases}$$

puis une deuxième famille de courbes dont les projections sur XOY sont les hyperboles équilatères

$$[2b(x - y) - A](x + y) = a.$$

Épreuve pratique. — *Soit s l'arc de la lemniscate $r^2 = 2\cos(2\theta)$, compté à partir de l'origine. Montrer que $\frac{1}{r^2} = p(s; g_2, g_3)$, avec $g_2 = 1$, $g_3 = 0$. Arc total. Aire de la surface de révolution engendrée par la lemniscate en tournant autour de* OX.

Solution. — On a

$$s = \int_0^r \frac{2\,dr}{\sqrt{4 - r^4}},$$

et si $z = \frac{1}{r^2}$,

$$s = \int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - z}}.$$

L'arc total est 4ω, l'aire cherchée est $4\pi(2 - \sqrt{2})$.

(Lyon, juillet 1919.)

Épreuve théorique. — 1° *Intégrer l'équation différentielle*

$$2xy\,dy + (x^2 - y^2 + 1)\,dx = 0;$$

2° *Expression générale de ses facteurs intégrants;*

3° *Trajectoires orthogonales des courbes intégrales;*

4° *Montrer que le réseau formé par les courbes intégrales et leurs trajectoires orthogonales est un réseau de courbes isothermes.*

Indications sur la solution. — En posant $y^2 = \eta$, on est ramené à une équation linéaire. L'intégrale générale, cherchée par l'une quelconque des méthodes connues, sera donnée par l'équation $\frac{x^2 + y^2 - 1}{x} = a = \text{const.}$, qui représente un faisceau de cercles passant par les deux points fixes réels $x = 0$, $y = \pm 1$.

$\frac{1}{x^2}$ est un facteur intégrant particulier, et φ désignant une fonction arbitraire de son argument $\frac{1}{x^2}\varphi\left(\frac{x^2 + y^2 - 1}{x}\right)$ est le facteur intégrant le plus général. L'équation différentielle des trajectoires orthogonales est

$$(x^2 - y^2 + 1)\,dy - 2xy\,dx = 0.$$

Elle admet $\frac{1}{y^2}$ comme facteur intégrant. L'intégrale générale $\frac{x^2 + y^2 + 1}{y} = b = \text{const.}$ donne le faisceau de cercles associé du précédent.

Si l'on pose

$$x^2 + y^2 - 1 = ux,$$
$$x^2 + y^2 + 1 = vy,$$

et qu'on prenne u, v comme nouvelles coordonnées, on trouve

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 \\ &= \frac{(v\sqrt{u^2+4} + u\sqrt{v^2-4})^2 (u^2+4)(v^2-4)}{4(u^2+v^2)} \\ &\quad \times \left[\frac{du^2}{(u^2+4)^2} + \frac{dv^2}{(v^2-4)^2}\right] \end{aligned}$$

et, de la forme du deuxième membre, il résulte que le réseau considéré est bien formé de courbes isothermes.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Si* $z = x + iy$, *mettre* arc tang z *sous la forme* $X(x, y) + iY(x, y)$, X *et* Y *désignant des fonctions réelles des variables réelles* x, y. *Quelles sont les courbes* X = const., Y = const.?

Le point z *parcourt le segment de droite* $(0, 1 + i)$. *On part de l'origine avec la valeur* 0 *pour* arc tang z. *Avec quelle valeur de* arc tang z *arrive-t-on au point* $1 + i$?

Le point z *parcourt un cercle de centre* 0 *et de rayon* $\rho < 1$. *Quelle courbe parcourt le point* $u =$ arc tang z?

INDICATIONS SUR LA SOLUTION :

$$u = \text{arc tang}\, z = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

$$= \frac{1}{2} \text{arc tang} \frac{2x}{1 - x^2 - y^2} + h\pi$$

$$+ \frac{i}{4} \log \frac{x^2 + y^2 + 1 + 2y}{x^2 + y^2 + 1 - 2y} \qquad (h \text{ entier}).$$

Les courbes X = const., Y = const. forment le réseau isotherme déjà considéré dans le problème d'analyse

$$\text{arc tang}(1 + i) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \text{arc tang}\, 2 + i \log 5.$$

Enfin, la dernière courbe demandée a pour équation

$$(1 - \rho^2)^2 \tan^2(2X) + (1 + \rho^2)^2 \operatorname{th}^2(2Y) = 4\rho^2.$$

(Lyon, novembre 1919.)

Marseille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *On pose*

$$x + ay = u, \qquad x - ay = v, \qquad z = f(u) + \varphi(v).$$

Choisir les fonctions arbitraires $f(u)$ *et* $\varphi(v)$ *de sorte que les surfaces représentées paramétriquement par ces équations soient développables.*

2° *Intégrer l'équation linéaire aux dérivées partielles*

$$ap + q + 2a = 0,$$

et déterminer celle des surfaces qui satisfait à cette équation et qui est circonscrite à la sphère de rayon R *donné dont l'équation est*

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

3° *Rapprocher les deux questions précédentes en supposant que a est donné le même dans les deux cas.*

Solution. — 1° On trouve $f''\varphi'' = 0$. Par exemple, on peut poser $z = A(x + ay) + B + f(x - ay)$, équation de cylindres avec une seule fonction arbitraire $B + f(x - ay)$ et une constante arbitraire A.

2°-3° L'intégrale générale peut être représentée par

$$z + x + ay = f(x - ay).$$

Elle représente des cylindres de la famille précédente quand $A = -1$.

L'intégrale particulière est

$$(1 + 5a^2)(x^2 + y^2 + z^2 - R^2) - (ax + y - 2az)^2 = 0$$

ou encore

$$(z + 2ay)^2 + (2ax + az)^2 + (ay - x)^2 - R^2 = 0,$$

équation renfermant trois fonctions linéaires non indépendantes et, par conséquent, représentant un cylindre.

Épreuve pratique. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$mu - z\frac{du}{dz} + \frac{2z^m}{1 - z^2} = 0,$$

où m est un nombre entier positif donné, z la variable indépendante et u la fonction.

Le point z décrivant dans le plan des z l'un quelconque des cercles qui passent au point $z = +i$, à l'exclusion de ceux qui passeraient par les points singuliers, calculer les valeurs au point $z = +i$ de la fonction u de z qui cor-

respond à la valeur zéro de la constante arbitraire dans l'intégrale générale et leurs variations quand le point z revient au même point $z = +i$.

Distinguer, suivant ces variations, divers groupes de cercles.

Solution. — L'intégrale générale est

$$u = z^m \left(\log \frac{z^2}{1 - z^2} + C \right),$$

et l'intégrale à étudier, correspondant à $C = 0$, est

$$u = z^m [2 \log z - \log(z - 1) - \log(z + 1) - \pi i].$$

La fonction a, dans le plan des z, trois points singuliers $a = 0$, $b = 1$, $c = -1$. Les cercles passant par le point $z = +i$:

1° peuvent ne renfermer aucun des trois points;

2° peuvent entourer l'un de ces points;

3° peuvent entourer deux de ces points (-1 et 0, ou 0 et $+1$);

4° peuvent entourer les trois points.

Au point $z = +i$, on a

$$u = i^m [-\log 2 + (2k + 1)\pi i].$$

Quand le point z décrit l'un des cercles dans un sens connu, chaque point singulier entouré par le cercle correspond à une variation de $\pm 2\pi i$. D'ailleurs z^m reprenant la valeur de i^m, la variation de la fonction est $2n\pi i^{m+1}$, n étant un nombre entier positif, nul ou négatif facile à déterminer pour chaque groupe de cercles.

Un cercle fait donc, d'une manière générale, passer, au point $z = +i$, la valeur de u d'une de ses significations à une autre. (Marseille, juin 1919.)

Épreuve théorique. — 1° *Intégrer l'équation aux dérivées partielles*

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} - 2xy \left(x \frac{\partial z}{\partial y} + y \frac{\partial z}{\partial x} \right) - 2z(x^2 + y^2) = 0.$$

2° *Vérifier directement que la surface dont l'équation en coordonnées cartésiennes est* $xyz = a$, *la lettre a représentant une constante est une intégrale de cette équation, et déterminer de quelle manière elle se rattache à l'intégrale générale.*

3° *Déterminer les lignes de niveau et les lignes de pente de cette surface.*

4° *Existe-t-il sur cette surface des lignes asymptotiques réelles?*

Solution. — L'intégrale générale est une relation arbitraire entre les fonctions $ze^{y^2-x^2}$ et $xye^{x^2-y^2}$.

Les lignes de pente et les lignes de niveau ont pour projections les hyperboles $xy = \text{const.}$ et $x^2 - y^2 = \text{const.}$

On a $s^2 - rt = -\dfrac{3a^2}{x^4y^4}$; il n'y a donc pas de lignes asymptotiques réelles.

Épreuve théorique. — *Calculer, en prenant le sens positif d'un cercle d'un rayon r plus petit que l'unité et ayant son centre à l'origine, les valeurs des trois intégrales*

$$\int \log(1+z)\,dz, \qquad \int \frac{\log(1+z)}{z}\,dz, \qquad \int \frac{\log(1+z)}{z^2}\,dz.$$

Séparer dans les résultats les parties réelles et les parties imaginaires et en conclure les valeurs de plusieurs intégrales définies réelles, en particulier de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \log(1 + 2r\cos\varphi + r^2)\cos\varphi\,d\varphi.$$

Plus généralement, calculer l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \log(a^2 + ab\cos\varphi + b^2)\cos\varphi\,d\varphi,$$

quand a et b sont des nombres positifs donnés.

Solution. — Voir les *Exercices de Frenet* pour les résultats. (Marseille, novembre 1919.)

CHRONIQUE.

Doctorat ès sciences mathématiques.

Sorbonne (soutenances de 1919).

M. F.-C. Clapier. — 1° Sur les surfaces minima ou élassoïdes;

2° Applications géométriques des transformations de contact ou des groupes de transformations.

M. Egnell Axel. — 1° Recherches de Géométrie infinitésimale vectorielle;

2° Sur les propriétés géométriques des courbes conjuguées dans le mouvement relatif de deux solides.

M. G. Cerf. — 1° Sur les transformations des équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque à deux variables indépendantes;

2° Déformation infiniment petite des surfaces.

Agrégation des Sciences mathématiques (1919).

Concours normal. — MM. Callet, Dufaut, Lancelot, Léger, Someyre.

Section des mutilés et réformés. — MM. Blaquière, Mahé, Pons, Vaulot.

Concours spécial. — MM. Flamant, Morel, Benoit, Sartre, Prulhière, Delbouis, Métral, Schmidt, Lecomte, Delens, Millet, Roy, Vuillard, Mahuet, Galetti.

Section des mutilés et réformés. — M. Perrachon.

Section des anciens admissibles (1914). — MM. Dumas et Raymond.

Académie des Sciences. — Prix attribués en 1919.

Mathématiques. — *Prix Francœur :* M. Georges Giraud, docteur ès sciences, pour ses travaux sur les fonctions automorphes.

Mécanique. — *Prix Poncelet :* M. Prosper Charbonnier, inspecteur général de l'Artillerie navale, pour ses travaux de balistique.

Cours de la Sorbonne.

I. Géométrie Supérieure. — M. Cl. Guichard, qui, dans sa dernière série de leçons, avait traité des *Systèmes de droites*, a pris cette année pour sujet les *Propriétés métriques des courbes dans un espace d'ordre quelconque* (mardi et vendredi, 10^h 30).

On sait que les concepts fondamentaux de la géométrie métrique dans un espace à n dimensions ont été développés dans un Mémoire essentiel de M. Camille Jordan, un peu difficile à lire, paru en 1875 dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. III, p. 103.

II. Théorie des fonctions. — M. Émile Borel traite des *Formes quadratiques et de leurs extensions analytiques* (samedi, 4^h).

Le Professeur étudie les formes quadratiques algébriques, dont le rôle est fondamental en géométrie, les formes quadratiques de différentielles, qui ont tant en mécanique analytique que dans la théorie des surfaees et des espaces une importance essentielle, et les formes

quadratiques à une infinité de variables. Ce sujet embrasse diverses théories avec lesquelles les jeunes géomètres et physiciens doivent être familiarisés, et qui sont plus connues à l'étranger, notamment en Italie, que chez nous.

Cours du Collège de France.

I. Cours de M. Humbert. — *Quelques applications des fonctions elliptiques.* Le cours du lundi (13^h 15) est consacré aux applications à la géométrie avec de nombreuses excursions dans des domaines voisins (intégrales abéliennes, géométrie sur une courbe, etc.).

Le cours du mardi (9^h 15) a pour objet les applications à l'arithmétique : le Professeur expose les travaux de Jacobi, de Liouville, d'Hermite, et les siens, relatifs aux nombres des décompositions d'un entier en sommes de carrés et aux nombres de classes des formes quadratiques binaires et positives.

II. Cours de M. Hadamard. — *L'Œuvre de Henri Poincaré en théorie des fonctions.* Le Professeur étudie cette œuvre dans ses relations avec les grands courants d'idées contemporains et avec les travaux qu'elle a provoqués. D'un grand intérêt historique et philosophique, cette étude est un moyen d'initiation très précieux à toutes les doctrines mathématiques de notre époque, mercredi (15^h 30).

Le lundi (10^h30), M. Hadamard reprend les réunions mathématiques qu'il avait organisées avant la guerre : il y dirige l'étude critique, faite par ses auditeurs, de Mémoires récents, qui sont, pour cette année, ceux parus dans les cinq derniers volumes des *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo.*

Facultés des Sciences. — Personnel.

Bordeaux. — M. *Trousset*, docteur ès sciences, aide-astronome à l'Observatoire de Floirac, est nommé maître de conférences en remplacement de M. Esclangon, en mission à Strasbourg.

Grenoble. — M. *Collet*, professeur d'analyse infinitésimale, est admis à la retraite.

M. *Gau*, professeur adjoint, est nommé professeur d'analyse infinitésimale.

M. *Janet*, agrégé de mathématiques, est nommé maître de conférences.

Lille. — M. *Demartres*, professeur d'analyse mathématique, est décédé à l'âge de 71 ans.

M. *Chazy*, professeur de mathématiques générales, est nommé professeur d'analyse.

M. *Chapelon*, docteur ès sciences, ingénieur des mines, est nommé maître de conférences de mathématiques.

M. *Kampé de Fériet*, docteur ès sciences, est nommé maître de conférences de mathématiques.

Montpellier. — M. *Pierre Humbert*, docteur ès sciences, est nommé maître de conférences de mathématiques, en remplacement de M. Villat, passé à Strasbourg.

Nancy. — M. *Floquet*, professeur d'analyse mathématique, est admis à la retraite et nommé professeur honoraire.

M. *Leau*, docteur ès sciences, professeur au Lycée Saint-Louis, est nommé chargé de cours de calcul différentiel et intégral.

M. *Got*, docteur ès sciences, professeur au Lycée de Marseille, est chargé d'un cours de mathématiques.

Paris. — M. *V.-J. Boussinesq*, membre de l'Institut, professeur de calcul des probabilités et de physique mathématique, est admis, sur sa demande, à la retraite, et nommé professeur honoraire; 59 ans de services, dont 12 dans l'enseignement secondaire, 14 à la Faculté de Lille et 33 à la Sorbonne.

M. *Vessiot*, chargé de cours, est nommé professeur de mathématiques générales.

M. *Julia*, agrégé et docteur ès sciences, est chargé des fonctions de maître de conférences de mathématiques à l'École des Hautes Études.

Strasbourg. — Le personnel de l'Institut de Mathématiques a été indiqué dans le numéro de septembre 1919.

MM *Pérès* et *Thiry* sont chargés de l'enseignement des mathématiques générales.

M. *Bauer* est nommé maître de conférences de physique mathématique.

Toulouse. — M. *Roy*, docteur ès sciences, est nommé professeur de mécanique rationnelle, en remplacement de M. Lattès, décédé.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1 84.

(1895, p. 59; 1917, p. 146.)

Si, à deux tétraèdres, dont les sommets sont les huit points communs à trois quadriques, on circonscrit deux quadriques bitangentes, dont une des coniques communes

est dans un plan fixe, le plan de l'autre passe par un point fixe. E. Duporcq.

Solution
Par M. R. Bouvaist.

On connaît le théorème suivant, dû à Hesse : *Si l'on désigne par* $A_i (i = 1, 2, \ldots, 8)$ *les points communs à trois quadriques, si l'on partage ces points* A_i *en deux groupes de quatre points, les deux tétraèdres ayant respectivement pour sommets les points de chacun de ces groupes sont conjugués à une même quadrique* Σ.

Il en résulte que les sphères circonscrites à ces deux tétraèdres sont orthogonales à la sphère de Monge de Σ, leur plan radical passera par le centre ω de Σ, d'où l'on conclut immédiatement que si deux quadriques, circonscrites à chacun de ces tétraèdres, ont une conique commune située dans un plan π_1, le plan π_2 de leur seconde conique d'intersection passera par le pôle ω_1 de π_1 par rapport à Σ.

1785.

(1898, p. 279; 1917, p. 356.)

Étant donné un arc de courbe plane, on considère la perpendiculaire abaissée du barycentre du périmètre de cet arc sur la corde qui en joint les extrémités; enveloppe des droites qui correspondent ainsi à des arcs de courbe parallèles à un arc de courbe donné. E. Duporcq.

Solution
Par M. L. Varchon.

Soit OA l'arc donné. Choisissons sur la normale un sens positif et prenons comme axe Ox, la normale positive en O et comme axe Oy la tangente en O.

Soit $M(x, y)$ un point de la courbe. Posons $\text{arc}\,OM = s$, et désignons par θ l'angle de la normale en M avec Ox, avec la condition que $\theta = 0$ pour $s = 0$. Désignons aussi par l, la longueur de l'arc OA ; par a, b, les coordonnées du point A ; par ξ, η, celles du barycentre de l'arc, et par α, l'angle de la normale en A avec Ox.

Soit O'A' l'arc parallèle à OA obtenu en portant sur les normales orientées une longueur ρ; nous désignerons les élé-

ments de O′A′ par les mêmes lettres que les éléments correspondants de OA, mais en les accentuant. On a les relations connues :

$$x' = x + \rho\cos\theta, \qquad y' = y + \rho\sin\theta,$$
$$ds' = ds + \rho\, d\theta,$$
$$l' = l + \rho\alpha.$$

On en déduit

$$l'\xi' = \int_{O'A'} x'\, ds'$$
$$= \int_{OA} x\, ds + \rho \int_{OA} \cos\theta\, ds + \rho \int_{OA} x\, d\theta + \rho^2 \int_{OA} \cos\theta\, d\theta$$

et

$$l'\eta' = \int_{O'A'} y'\, ds'$$
$$= \int_{OA} y\, ds - \rho \int_{OA} \sin\theta\, ds + \rho \int_{OA} y\, d\theta + \rho^2 \int_{OA} \sin\theta\, d\theta.$$

Posons

$$A = \int_{OA} x\, d\theta, \qquad B = \int_{OA} y\, d\theta.$$

En tenant compte des relations

$$dx = -\sin\theta\, ds, \qquad dy = \cos\theta\, ds,$$

on obtient immédiatement l'expression des coordonnées du barycentre de O′A′ :

$$\xi' = \frac{l\xi + (A - b)\rho + \rho^2 \sin\alpha}{l + \alpha\rho},$$
$$\eta' = \frac{l\eta + (B - a)\rho + \rho^2(1 - \cos\alpha)}{l + \alpha\rho}.$$

L'équation de la perpendiculaire abaissée de ce point sur la corde O′A′ est, en l'ordonnant par rapport à ρ,

$$[(\alpha x - A)(1 - \cos\alpha) - (\alpha y - B)\sin\alpha]\rho^2$$
$$- \{a(\alpha x - A) + b(\alpha y - B) - l[(x - \xi)(1 - \cos\alpha) - (y - \eta)\sin\alpha]\}\rho$$
$$- l[a(x - \xi) + b(y - \eta)] = 0.$$

En exprimant que cette équation en ρ admet une racine double, on aura immédiatement l'équation de l'enveloppe cherchée :

$$\begin{aligned}&\{a(\alpha x - A) + b(\alpha y - B)\\&\quad - l[(x - \xi)(1 - \cos\alpha) - (y - \eta)\sin\alpha]\}^2\\&\quad + 4l[a(x - \xi) + b(y - \eta)]\\&\quad \times [(\alpha x - A)(1 - \cos\alpha) - (\alpha y - B)\sin\alpha] = 0.\end{aligned}$$

On peut l'écrire sous la forme plus simple

$$\begin{aligned}&\{a(\alpha x - A) + b(\alpha y - B)\\&\quad - l[(x - \xi)(1 - \cos\alpha) - (y - \eta)\sin\alpha]\}^2\\&\quad - 4l[b(1 - \cos\alpha) - a\sin\alpha]\\&\quad \times [(\alpha\xi - A)y - (\alpha\eta - B)x + A\eta - B\xi] = 0,\end{aligned}$$

sous laquelle on reconnaît une parabole.

Autre solution par M. R. Bouvaist.

1811.

(1898, p. 181; 1917, p. 257.)

Soient a et b deux nombres positifs premiers entre eux; n un nombre entier positif quelconque. Démontrer que le nombre des solutions entières non négatives de l'équation

$$ax + by = n$$

est égal à

$$E\left(n\frac{a'}{a}\right) + E\left(n\frac{b'}{b}\right) - n + 1;$$

a' est l'associé du nombre b suivant le module a, c'est-à-dire le nombre positif $< a$ satisfaisant à la congruence

$$ba' \equiv 1;$$

semblablement, b' est l'associé de a suivant le module b; enfin $E(x)$ désigne le plus grand nombre entier contenu dans la quantité x. J. Franel.

SOLUTION

Par M. FAUCHEUX.

$ab' + a'b - 1$ est multiple de a et de b, par suite de ab; $ab' + a'b$ est de la forme $pab + 1$, p étant un entier positif; chacun des nombres ab' et $a'b$ étant plus petit que ab, $p = 1$ et

$$ab' + (a' - a)b = 1.$$

On obtient une solution entière de l'équation proposée en prenant

$$x_0 = nb'; \qquad y_0 = n(a' - a).$$

La solution générale est

$$x = nb' + kb; \qquad y = n(a' - a) - ka,$$

et le problème revient à trouver combien de valeurs de k rendent x et y positifs ou nuls.

x est positif ou nul pour

$$k \geq -\mathrm{E}\left(n\frac{b'}{b}\right);$$

y est positif ou nul pour

$$k \leq \mathrm{E}\left(n\frac{a'}{a}\right) - n.$$

et l'on voit facilement qu'il existe

$$\mathrm{E}\left(n\frac{a'}{a}\right) + \mathrm{E}\left(n\frac{b'}{b}\right) - n + 1$$

valeurs de k satisfaisant aux conditions de l'énoncé.

QUESTION PROPOSÉE.

2434. Étant donnés une sphère S, l'un de ses diamètres Δ, deux de ses tangentes Δ_1 et Δ_2 parallèles à Δ, dont les points

de contact soient diamétralement opposés, enfin les grands cercles C_1 et C_2 de cette sphère, dont les plans, menés par le diamètre perpendiculaire au plan de Δ_1 et Δ_2, sont inclinés à 45° sur Δ, on considère le conoïde droit Γ, de directrice Δ, qui passe par les cercles C_1 et C_2, puis les conoïdes droits Γ_1 et Γ_2, circonscrits à S, qui ont respectivement pour directrices Δ_1 et Δ_2.

On demande de calculer les volumes des solides constitués par :

1° La partie du conoïde Γ limitée aux cercles C_1 et C_2;

2° La partie du même conoïde intérieure au cylindre circonscrit à la sphère S et d'axe Δ;

3° L'ensemble de la sphère et des conoïdes Γ_1 et Γ_2 limités respectivement à leurs directrices Δ_1 et Δ_2.

M. D'OCAGNE.

ERRATA.

Quatrième série, Tome XVII. 1917 :

Page 163, ligne 12 et formules (6), remplacer $\overline{LM}$. $\overline{LN}$ par $\overline{LN}$, $\overline{LM}$. Le triangle LMN de la page 164 est *inversement* égal à celui de la page 163 et devrait être désigné par une notation différente L′M′N′.

Page 165, remplacer L, M, N par $\overline{LN}$, $\overline{LM}$, ... Le triangle LMN des pages 166 et 167 devrait être noté L′M′N′.

Quatrième série, Tome XIX, 1919 :

Page 396, ligne 2, *au lieu de* (PNQN + Q), *lire* PNQ(N + Q).

Page 193, ligne 14. *au lieu de* $\frac{1-\mu}{1}$, *lire* $\frac{1}{1-\mu}$.

[C1f]

SUR LE MAXIMUM ET LE MINIMUM DES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES;

PAR M. G. VALIRON.

Considérons une fonction de deux variables $z = f(x, y)$ développable par la formule de Taylor autour d'un point que nous pouvons supposer être l'origine ($x_0 = 0$, $y_0 = 0$). Scheeffer a indiqué une méthode permettant de reconnaître si la fonction z est extremum (c'est-à-dire maximum ou minimum) en ce point [1]. V. von Dantscher a repris la question d'une façon différente et a donné un procédé permettant de reconnaître au bout d'un nombre fini d'opérations si la fonction est extremum, le seul cas où la méthode est en défaut étant celui où la surface $z = f(x, y)$ est tangente au plan des xy suivant une ou plusieurs lignes passant par l'origine [2]. La méthode de von Dantscher est celle qui se présente naturellement à l'esprit, mais le procédé direct employé par l'auteur, pour montrer que le nombre des opérations à effectuer est fini, est assez long.

Je vais montrer qu'on peut conduire la démonstration d'une façon simple et rapide en utilisant dès le début le théorème de Weierstrass sur les fonctions

(1) *Mathematische Annalen*, t. 35, 1890, p. 541.
(2) *Mathematische Annalen*, t. 42, 1893, p. 89.

implicites dont V. von Dantscher ne fait usage qu'à la fin de son exposé [1].

1. Nous supposons que $f(x, y)$ possède des dérivées partielles d'ordre $p+1$ continues et que les conditions de l'extremum relatives aux dérivées du premier ordre sont réalisées, de sorte que le développement de z par la formule de Taylor s'écrit

$$(1)\quad z = f(x, y) \equiv \varphi_2(x, y) + \varphi_3(x, y) + \ldots + \varphi_p(x, y) + R_p(x, y),$$

$\varphi_i(x, y)$ étant un polynome homogène de degré i à coefficients numériques, et $R_p(x, y)$ un polynome homogène de degré $p+1$ en x et y dont les coefficients sont des fonctions de x et y bornées au voisinage de l'origine.

Nous supposons que la première des formes $\varphi_i(x, y)$ qui n'est pas identiquement nulle est de degré pair et semi-définie, le résultat étant immédiat dans les autres cas.

Plaçons-nous d'abord dans le cas simple où $\varphi_2(x, y)$ n'est pas identiquement nul et est semi-défini, on a

$$(1)\quad z = A(y - \alpha_1 x)^2 + \varphi_3(x, y) + \ldots + \varphi_p(x, y) + R_p(x, y)\ [2];$$

on peut en particulier prendre $p = 2$, de sorte que M étant le maximum de la valeur absolue des quatre dérivées partielles du troisième ordre pour $x^2 + y^2 \leqq r^2$, on a

$$(2)\quad |z - A(y - \alpha_1 x)^2| \leqq \frac{2}{3} M(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \quad (x^2 + y^2 \leqq r^2).$$

---

(1) La présente Note n'a aucune prétention à l'originalité. Je me propose simplement de simplifier la démonstration d'une propriété connue.

(2) Le cas où les termes du second degré sont de la forme Ax^2 se traite de la même façon.

Soit ε un nombre positif arbitrairement petit, isolons la droite $y - \alpha_1 x = 0$ par un angle Δ_ε d'ouverture 2ε ayant cette droite pour bissectrice. A l'extérieur de cet angle ou sur ses côtés, on a

$$(y - \alpha_1 x)^2 > (1 + \alpha_1^2) \sin^2 \varepsilon (x^2 + y^2);$$

donc, d'après l'inégalité (2), z a le signe de A dans tout domaine fermé D_ε extérieur à un angle Δ_ε et intérieur au cercle de rayon R_ε, R_ε étant le plus petit des deux nombres r et $\frac{3}{2} \sin^2 \varepsilon M^{-1} (1 + \alpha_1^2)$.

Posons $y - \alpha_1 x = tx$, on aura

$$z = x^2 f_1(x, t),$$

$$f_1(x, t) = At^2 + x\varphi_3(1, \alpha_1 + t) + \ldots$$
$$+ x^{p-2}\varphi_p(1, \alpha_1 + t) + x^{p-1} R_p(1, \alpha_1 + t),$$

les coefficients de $R_p(1, \alpha_1 + t)$ étant des fonctions bornées de x et t.

Si $f_1(x, t)$ est extremum pour $x = t = 0$, il existe un domaine $-x_0, +x_0; -t_0, +t_0$; dans lequel $f_1(x, t)$ a le signe de A (puisque cette fonction a le signe de A pour x nul), si l'on prend l'angle Δ_ε intérieur à l'angle balayé par la droite $y = tx$ lorsque t varie de $\alpha_1 - t_0$ à $\alpha_1 + t_0$, x est différent de 0 dans cet angle, donc z a le signe de A dans Δ_ε, et, d'après ce qui précède, z est extremum.

Si $f_1(x, t)$ n'est pas extremum pour $x = t = 0$, c'est qu'il n'a pas toujours le signe de A, il existe des points $x_n \neq 0$, t_n tendant vers $x = 0$, $t = 0$, tels que $Af_1(x_n, t_n) \leqq 0$, donc aussi tels que $Az \leqq 0$, z n'est pas extremum.

On est ainsi ramené à chercher si $f_1(x, t)$ est extremum pour $x = 0$, $y = 0$. Le raisonnement a été fait dans le cas de l'extremum strict, mais on voit de même

que, pour que z soit extremum au sens large, c'est-à-dire que $Az \geqq 0$, il faut et il suffit que $f_1(x, t)$ soit extremum au sens large.

Le seul cas ambigu qui puisse se produire dans l'étude de $f_1(x, t)$ est celui où $\varphi_3(1, \alpha_1) = 0$, et où la forme

$$At^2 + t\varphi'_3(1, \alpha_1) + x^2\varphi_4(1, \alpha_1)$$

est encore semi-définie, elle s'écrit alors $A(t - \alpha_2 x)^2$ et l'on est ramené à la même question. On effectuera la transformation $t = \alpha_2 x + ux$, et ainsi de suite.

Si la question n'est pas résolue au bout de q opérations, les valeurs des dérivées partielles d'ordre $q + 1$ interviendront alors, on peut donc être arrêté si les dérivées d'un certain ordre ne sont plus continues. Supposons que z soit développable en série de Taylor dans le voisinage de l'origine, peut-il arriver que dans l'application de la méthode on obtienne toujours une forme semi-indéfinie ?

D'après un théorème de Weierstrass [1] l'équation

$$f(x, y) = 0$$

définit deux fonctions y_1 et y_2 de x et deux seulement s'annulant pour $x = 0$ et l'on peut écrire

$$f(x, y) = [Ay^2 + a_1(x)y + a_2(x)]\,H(x, y),$$

$a_1(x)$, $a_2(x)$, et $H(x, y)$ étant holomorphes dans un domaine $|x|, |y| < r$ et $H(x, y) > 0$ dans ce domaine, [car $H(0, 0) = 1$]. On a donc, pour $|x| < r$,

$$(y_1 - y_2)^2 = \frac{1}{A^2}\{[a_1(x)]^2 - 4Aa_2(x)\},$$

et, par suite, si $y_1 - y_2$ n'est pas identiquement nul,

---

[1] *Voir* Goursat, *Traité d'Analyse*, t. 2, 3e édition, p. 279.

c'est-à-dire $Ay^2 + a_1(x)y + a_2(x)$ n'est pas un carré, il existera un nombre s tel que $\frac{y_1 - y_2}{x^s}$ tend vers une limite finie lorsque x tend vers o.

Lorsqu'on pose $y = (\alpha_1 + t)x$, les solutions y_1 et y_2 (dont le rapport à x tend vers α_1) sont transformées en les racines de $f_1(x, t)$ qui tendent vers o lorsque x tend vers o, et ainsi de suite. Si au bout de q opérations la question n'est pas résolue, c'est que la transformation

$$(3) \qquad y = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_q x^q + x^q Y$$

donne

$$z = x^{2q} f_q(x, Y)$$

avec

$$(4) \qquad f_q(x, Y) \equiv A(Y - \alpha_{q+1} x)^2 + \ldots$$

et y_1 et y_2 s'obtiennent en remplaçant Y dans l'égalité (3) par les solutions Y_1 et Y_2 de (4) qui s'annulent pour $x = 0$, par suite

$$\lim_{x=0} \frac{y_1 - y_2}{x^q} = 0.$$

Il est donc impossible que q soit supérieur à s, *au bout d'un nombre fini d'opérations la recherche est terminée.*

Supposons maintenant que $y_1 \equiv y_2$, on a

$$f(x, y) \equiv A\left[y - \frac{a_1(x)}{A}\right]^2 H(x, y)$$

si l'on fait les transformations successives

$$y = (\alpha_1 + t)x, \qquad t = (\alpha_2 + u)x, \qquad \ldots,$$

les termes de plus bas degré sont donnés par le premier terme puisque $H(0, 0) = 1$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ sont les coefficients du développement de $\frac{a_1(x)}{A}$; comme les α_i sont

réels, la fonction $a_1(x)$ est réelle. Le résultat final est donc le suivant :

Si $f(x, y)$ est holomorphe, la méthode conduit à un résultat au bout d'un nombre fini d'opérations, sauf si $f(x, y)$ contient un facteur double réel $[y - \alpha(x)]^2$, cas dans lequel il y a extremum au sens large.

2. Considérons maintenant le cas général où la première forme $\varphi_i(x, y)$ non identiquement nulle est de rang $2n$ et est semi-définie :

$$\varphi_{2n} \equiv A(y - \alpha_1 x)^{2a}(y - \beta_1 x)^{2b} \ldots (y - \delta_1 x)^{2d} x^{2e} \psi(x, y),$$

$\psi(x, y)$ étant définie positive. On est ramené ici à étudier la fonction

$$f_1(x, t) = x^{-2n} f(x, \alpha_1 + t)$$

et les fonctions analogues. Si toutes ces fonctions ont un extremum au sens strict, il en est de même de z; si toutes sont extremum au sens strict ou large, z est extremum au sens large, enfin si l'une de ces fonctions n'est pas extremum, z n'est pas extremum.

On a

$$f_1(x, t) \equiv A t^{2a} \chi(t) + x \varphi_{2n+1}(1, \alpha_1 + t) + \ldots,$$

$\chi(t)$ possédant un terme constant positif. Il peut se faire que l'ensemble des termes de plus bas degré de $f_1(x, t)$ soit une forme semi-définie et l'on sera ramené à la même question; cette forme est de degré $2a$ au plus, et le seul cas où l'on n'aura réalisé aucun progrès est celui où cette forme sera encore une puissance $(2a)$, donc où

$$f_1(x, t) \equiv A(t - \alpha_2 x)^{2a} + \ldots.$$

On posera alors $t = (\alpha_2 + u)x$, le même cas pourra se produire, et ainsi de suite. Je dis qu'au bout d'un nombre fini d'opérations on aura effectué une réduction, c'est-à-dire qu'on sera ramené au moins à une forme semi-définie dont les facteurs seront à des puissances moindres que $2a$, sauf dans un cas exceptionnel (on suppose $f(x, y)$ holomorphe).

D'après le théorème de Weierstrass, $f_1(x, t)$ a $2a$ solutions nulles pour $x = 0$, et l'on a dans un domaine entourant l'origine

$$f_1(x, t) \equiv Q(x, t)\, H(x, t)$$

avec

$$(5) \qquad Q(x, t) \equiv A\,[t^{2a} + t^{2a-1} A_1(x) + \ldots + A_{2a}(x)],$$

les fonctions $A_i(x)$ étant holomorphes ainsi que $H(x, t)$ pour $|x| < r$, $|t| < r$ et $H(x, t)$ étant positif dans ce domaine. L'équation $Q(x, t) = 0$ donne les $2a$ solutions $t_1, t_2, \ldots, t_{2a}$, de $f_1(x, t)$ qui s'annulent pour $x = 0$, celles de ces solutions qui sont distinctes sont les racines de l'équation obtenue en annulant le quotient du polynome $Q(x, t)$ par le plus grand commun diviseur entre ce polynome et sa dérivée; les racines distinctes sont donc celles d'une équation

$$(6) \qquad t^{\lambda} + t^{\lambda-1} B_1(x) + \ldots + B_{\lambda}(x) = 0$$

dont les coefficients sont holomorphes à l'origine, car ils sont obtenus par des opérations arithmétiques en nombre fini à partir des $A_i(x)$ et ils doivent s'annuler pour $x = 0$. Si $Q(x, t)$ n'est pas une puissance $(2a)^{\text{ième}}$ l'équation (6) est au moins du second degré et l'équation aux carrés des différences des racines possède un terme constant non identiquement nul $C(x)$; si cette fonction $C(x)$ s'annule s fois pour $x = 0$, l'équation (6)

et par suite (5) possède deux racines t_1 et t_2 telles que $\frac{t_1 - t_2}{x^s}$ tend vers un nombre fini lorsque x tend vers o.

Or, on voit comme au n° 1 que, si au bout de q opérations la réduction n'est pas effectuée, le quotient de la différence de deux solutions de $Q(x, t) = 0$ par x^{q-1} tend vers o, c'est donc que la réduction s'opère au bout de s opérations au plus.

Si $Q(x, t)$ a toutes ses racines égales, donc est de la forme $A[y - \alpha(x)]^{2a}$, ce sont les coefficients de $\alpha(x)$ que l'on obtient dans les opérations effectuées en vue de la réduction qui est impossible, par suite $\alpha(x)$ est réel, et comme les solutions de $f(x, y)$ correspondant au facteur

$$(y - \alpha_1 x)^{2a}$$

se déduisent de celles de $Q(x, t)$ par la transformation

$$y = (\alpha_1 + t)x,$$

$f(x, y)$ contient le facteur

$$[y - \alpha_1 x - \alpha(x)]^{2a}.$$

Ainsi la réduction s'opère au bout d'un nombre fini d'opérations, sauf si $f(x, y)$ contient un facteur réel à la puissance $2a$. Écartons ce cas. Au bout de q opérations on aura la transformation

$$y = \alpha_1 x + \alpha_2 x + \ldots + \alpha_q x^q + Y x^q$$

donnant

$$f(x, y) = x^{2n+2a(q-1)} f_q(x, Y),$$

les termes de plus bas degré de $f_q(x, Y)$ pouvant constituer une forme semi-définie dont les facteurs premiers seront élevés à une puissance moindre que $2a$, la réduction des fonctions correspondantes se fera après un

nombre fini d'opérations, sauf si $f_q(x, Y)$ contient un facteur réel de l'une des deux formes

$$[Y - \alpha(x)]^{2a'}, \quad [x - \beta(Y)]^{2a'}.$$

Dans un cas comme dans l'autre, $f(x, y)$ admettra une solution réelle d'ordre $(2a')$.

D'une façon générale, après avoir effectué p réductions successives, on aura une transformation de la forme

$$x = S(X, Y), \qquad y = T(X, Y),$$

S et T étant des polynomes en X et Y à coefficients réels s'annulant pour $X = 0$, $Y = 0$, donnant

$$f(x, y) \equiv R(X, Y) f_k(X, Y),$$

$R(X, Y)$ étant un monome. Si dans $f_k(X, Y)$ la réduction d'un facteur de degré 2μ ne s'opère pas, c'est que cette fonction contient un facteur de l'une des formes

$$[Y - \gamma(X)]^{2\mu}, \quad [X - \delta(Y)]^{2\mu},$$

$\gamma(X)$ et $\delta(Y)$ étant holomorphes, réelles et nulles à l'origine. Il en résulte que $f(x, y)$ a une solution réelle, uniforme, d'ordre 2μ s'annulant pour $x = 0$.

Le seul cas où la méthode ne conduit pas à un résultat au bout d'un nombre fini d'opérations est donc celui où $f(x, y)$ est de la forme

$$(7) \qquad f(x, y) \equiv [\Pi \chi_i(x, y)]^2 F(x, y),$$

chaque facteur $\chi_i(x, y)$ définissant une branche de courbe simple réelle passant par l'origine.

Il faut en outre remarquer que, lorsqu'une réduction ne s'opère pas, il y a extremum large dans la région du plan correspondante, si donc on conduit les diverses opérations de réductions *simultanément* à partir des divers

facteurs de $\varphi_{2n}(x, y)$, le seul cas exceptionnel est celui où $f(x, y)$ étant de la forme (7) a un extremum au sens large. La surface $z = f(x, y)$ est tangente au plan des xy suivant certaines lignes réelles passant par l'origine, et reste du même côté du plan des xy dans le voisinage de l'origine.

On verra sans peine en utilisant la décomposition en deux facteurs de Weierstrass utilisée ci-dessus que, lorsqu'il y a extremum au sens large, $f(x, y)$ est de la forme (7), et le résultat définitif sera :

Lorsque $f(x)$ est analytique, les opérations de recherche conduites simultanément donnent un résultat au bout d'un temps fini, sauf s'il y a extremum large.

Lorsque $f(x, y)$ est un polynome, on peut reconnaître, par des opérations algébriques dont le nombre est limité par le degré m, si l'on se trouve dans le cas d'exception; mais cette recherche est même inutile, on verra facilement que si au bout de $(2m)!$ opérations effectuées à partir d'un facteur de $\varphi_{2n}(x, y)$, on n'est pas parvenu à un résultat, $f(x, y)$ est de la forme (7). *Le problème est donc complètement résoluble dans le cas des polynomes.*

Lorsque $f(x, y)$ a un développement illimité, chaque transformation qui redonne une forme semi-définie fournit deux relations entre les coefficients du développement portant sur un coefficient au moins dont le rang croît à chaque opération; lorsque le cas d'exception se produit, il y a une infinité de relations portant sur une infinité de coefficients du développement taylorien. Il faudrait connaître ces relations pour pouvoir dire que le problème est complètement résolu.

[O4h][O5f]

ÉQUATION ANGULAIRE D'UN CONOÏDE DROIT. APPLICATION AU CYLINDROÏDE ENVISAGÉ DANS SES RAPPORTS AVEC LA DISTRIBUTION DES COURBURES AUTOUR D'UN POINT D'UNE SURFACE;

PAR M. M. D'OCAGNE.

1. Si l'on prend le plan Oxy comme plan directeur d'un conoïde droit et si l'on suppose la directrice rectiligne de ce conoïde confondue avec Oz, on peut définir complètement cette surface par la relation entre le z de chaque génératrice et l'angle φ que fait cette génératrice avec Ox,

$$F(z, \varphi) = 0.$$

Telle est ce que nous appelons l'*équation angulaire* du conoïde considéré [1].

[1] Si l'on prend dans cette équation z et φ comme des coordonnées polaires rapportées au pôle O et à l'axe Ox, on obtient une courbe qui peut être regardée comme représentative de la distribution des génératrices le long de la directrice rectiligne. On voit que la sous-normale polaire en chaque point de cette courbe fait connaître le paramètre de distribution de la génératrice correspondante du conoïde et, puisque la directrice rectiligne se confond ici avec la ligne de striction, par suite, que les points centraux de toutes les génératrices se projettent en O sur Oxy, il en résulte que l'extrémité de la sous-normale polaire se confond en projection avec le point représentatif de la distribution des plans tangents pour chaque génératrice. (*Cours de Géométrie pure et appliquée de l'École Polytechnique*, t. I, p. 229.)

On remarquera que, pour chaque génératrice, la valeur de $\frac{dz}{d\varphi}$ représente, par définition même, le paramètre de distribution le long de cette génératrice.

Voici quelques exemples :

1° *Surface de vis à filet carré.* — Si l'on prend pour Ox la génératrice de la surface située dans Oxy, l'équation est

$$z = h\varphi.$$

2° *Paraboloïde équilatère.* — Si l'on place l'origine O au sommet et que l'on prenne pour Ox la génératrice passant par ce point, on a

$$z = h \operatorname{tang} \varphi.$$

3° *Cylindroïde.* — Avec la définition de ce conoïde telle qu'elle est donnée dans notre *Cours de Géométrie pure et appliquée de l'École Polytechnique* (t. I, p. 235), il suffit de prendre comme directrice la section du cylindre de révolution tangent à Oyz le long de Oz par un plan mené par Oy et coupant ce cylindre sur la hauteur h, pour obtenir immédiatement l'équation

$$z = h \cos^2 \varphi.$$

4° *Conoïde droit à noyau sphérique.* — Si, se rapportant à la définition donnée dans notre *Cours* (t. I, p. 233), on prend pour Oxy le plan diamétral horizontal de la sphère en faisant passer Ox par le centre de cette sphère de rayon r, et si l'on appelle a l'abscisse de ce centre, on a

$$z^2 = r^2 - a^2 \sin^2 \varphi,$$

qui, dans le cas où la directrice rectiligne Oz est tangente à la sphère ($a = r$), se réduit à

$$z = r \cos \varphi.$$

5° *Partie conoïdale de la voûte d'arêtes en tour ronde.* — Si l'on se reporte à la définition de ce conoïde donnée dans le même *Cours* (t. II, p. 117), que l'on appelle a la montée de la voûte (rayon du cercle méridien de sa partie torique) et φ_0 l'angle que fait avec l'axe de la projection horizontale du conoïde la génératrice de ce conoïde située dans le plan des naissances (angle $A\omega F$ de la figure 193, à l'endroit cité) on trouve, sans difficulté, l'équation

$$z^2 = a^2\left(1 - \frac{\varphi^2}{\varphi_0^2}\right).$$

2. Reprenons l'équation angulaire ci-dessus du cylindroïde (3°). Si l'on transporte l'origine en un point quelconque de Oz, sur lequel A_1 et A_2 sont les points extrêmes de ce conoïde, et si l'on pose $OA_1 = z_1$, $OA_2 = z_2$, les angles étant toujours comptés à partir de la même direction Ox, on voit, puisque l'on a

$$h = z_1 - z_2,$$

que l'équation devient

$$z - z_2 = (z_1 - z_2)\cos^2\varphi$$

ou

$$z = z_1\cos^2\varphi + z_2\sin^2\varphi.$$

Cette équation, obtenue d'une façon plus détournée par M. Chapelon (*N. A.*, 1906, p. 182), fait voir immédiatement, comme l'a remarqué cet auteur, que l'inverse du lieu des centres de courbure relatifs à un point d'une surface, par rapport à ce point est un cylindroïde. Ces centres de courbure sont, en effet, d'après le théorème de Meusnier, distribués, dans chaque plan normal, faisant avec Ox l'angle $\varphi + \frac{\pi}{2}$, sur le cercle ayant pour diamètre le rayon de courbure r donné par la formule

d'Euler

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos^2\varphi}{r_1} + \frac{\sin^2\varphi}{r_2}.$$

Par une inversion de puissance K, ces cercles donnent, dans chacun de ces plans normaux, une droite faisant avec Ox l'angle $\varphi + \frac{\pi}{2}$ et dont la distance z à O est donnée par

$$z = \frac{K}{r}.$$

On a, par suite, si les valeurs de z dans les plans principaux sont z_1 et z_2,

$$z = z_1 \cos^2\varphi + z_2 \sin^2\varphi,$$

qui n'est autre, d'après ce qu'on vient de voir, que l'équation angulaire d'un conoïde. Mais il y a plus : si l'on prend (en grandeur et signe) $K = r_1 r_2$, il vient $z_1 = r_2$, $z_2 = r_1$, et, par suite,

$$z = r_2 \cos^2\varphi + r_1 \sin^2\varphi.$$

Cette formule, rapprochée de celle qui fait connaître le rayon de courbure du contour apparent de la surface projetée orthogonalement (*voir* notre *Cours*, t. I, p. 190), montre que z est le rayon de courbure, à l'origine, du contour apparent de la surface projetée sur celui de ses plans normaux en O qui fait, avec Ox, l'angle $\varphi + \frac{\pi}{2}$. La droite inclinée à l'angle φ sur Ox, à cette distance z de O, n'est donc autre que l'axe de courbure de ce contour apparent. Elle est à angle droit sur la droite inverse du cercle de Meusnier, ci-dessus trouvée. D'où ce théorème :

Si la puissance d'inversion est prise égale au

produit des rayons de courbure en O, *le cylindroïde inverse, par rapport à* O, *de la surface lieu des centres de courbure relatifs à* O, *est identique à celui que l'on obtient en faisant tourner de* 90° *autour de la normale en* O *le lieu des axes de courbure, relatifs à ce même point, des contours apparents de la surface donnée projetée sur tous ses plans normaux en* O.

[K¹16b]

SUR LES CONTACTS DES SPHÈRES TANGENTES A QUATRE PLANS;

PAR M. V. THÉBAULT.

---

1. Désignons par a, b, c les plans bissecteurs des dièdres suivant BC, CA, AB; par α, β, γ ceux des dièdres suivant DA, DB, DC, dans un tétraèdre ABCD. Affectons d'un accent les plans bissecteurs des dièdres extérieurs.

Il existe en général huit sphères tangentes aux plans des quatre faces du tétraèdre. Ces sphères forment deux systèmes suivant que le nombre des plans bissecteurs intérieurs passant par le centre est pair ou impair. On a, par exemple,

(I) $(a, \alpha)(b, \beta)(c, \gamma)$,

(I′) $(a, \alpha)(b', \beta')(c', \gamma')$,

(I″) $(a', \alpha')(b, \beta)(c', \gamma')$,

(I‴) $(a', \alpha')(b', \beta')(c, \gamma)$

et

(I_1) $(a', \alpha)\ (b, \beta')\ (c, \gamma')$,

(I_2) $(a, \alpha')\ (b', \beta)\ (c, \gamma')$,

(I_3) $(a, \alpha')\ (b, \beta')\ (c', \gamma)$,

(I_4) $(a', \alpha)\ (b', \beta)\ (c', \gamma)$.

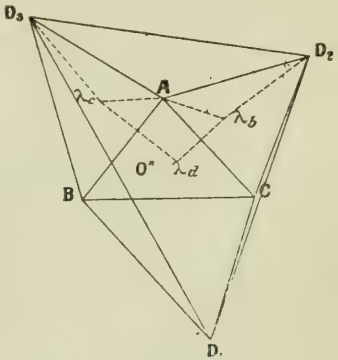
2. Ces deux systèmes sont nettement distincts :

1° La droite qui joint deux centres d'un même système rencontre deux arêtes opposées du tétraèdre; ainsi la droite (II') est (a, α);

2° La droite qui joint deux centres de systèmes différents passe par un sommet du tétraèdre; ainsi la droite (II_4) est (α, β, γ).

Les sphères du premier système sont respectivement la sphère intérieure au tétraèdre et les sphères situées dans les combles. Celles du second système sont les sphères situées dans les trièdres tronqués.

3. Si, par une droite, on mène les deux plans tan-



gents à une sphère et si l'on joint aux points de contact λ et μ, deux points quelconques A et B de la droite, les angles $A\lambda B$ et $A\mu B$ sont égaux.

Si λ est le contact d'une sphère tangente aux plans des quatre faces d'un tétraèdre sur la face ABC, par exemple, et si a_1, b_1, c_1 sont les angles compris entre les droites joignant λ aux sommets A, B, C, on pourra désigner les angles analogues des trois autres faces respectivement par

$$(a_1, b_2, c_2), \quad (a_2, b_1, c_2), \quad (a_2, b_2, c_1)$$

et

$$2\pi = a_1 + b_1 + c_1 = a_1 + b_2 + c_2 = a_2 + b_1 + c_2 = a_2 + b_2 + c_1,$$

d'où

$$b_1 = b_2, \qquad c_1 = c_2, \qquad a_1 = a_2.$$

Une sphère touchant les plans des quatre faces d'un tétraèdre, si l'on joint le point de contact d'une face aux sommets de cette face, les trois angles compris entre les droites ainsi menées sont les mêmes dans les quatre faces.

4. Le plan de chaque face d'un tétraèdre ABCD contient en général huit contacts susceptibles d'une élégante détermination.

Rabattons sur le plan ABC, par exemple, les faces DBC, DCA, DAB, de manière que les triangles obtenus D_1BC, D_2CA, D_3AB soient extérieurs à ABC. Les contacts de la sphère (I) inscrite intérieurement au tétraèdre sur les faces DBC, DCA, DAB se rabattent respectivement suivant les symétriques λ_a, λ_b, λ_c, par rapport à BC, CA, AB, du contact λ_d de la face ABC. Donc λ_d est l'inverse triangulaire du centre du cercle circonscrit au triangle $\lambda_a\lambda_b\lambda_c$ par rapport à ABC. Mais, à cause de l'égalité des triangles $A\lambda_b D_2$ et $A\lambda_c D_3$, par exemple, $\lambda_b\lambda_c D_3 D_2$ est un trapèze isoscèle, et $\lambda_a\lambda_b\lambda_c$ et $D_1 D_2 D_3$ sont homothétiques, le centre

d'homothétie étant le centre O de leurs cercles circonscrits.

Le contact λ_d, *d'une sphère* (I) *inscrite intérieurement au tétraèdre, sur la face* ABC, *est donc l'inverse triangulaire, par rapport à cette face, du centre du cercle circonscrit au triangle* $D_1 D_2 D_3$.

Si l'on rabat une face sur le plan ABC vers l'extérieur et les deux autres vers l'intérieur, l'inverse du centre du cercle circonscrit au triangle $D_1 D_2 D_3$ obtenu, par rapport à ABC, est le contact de l'une des sphères (I′), (I″), (I‴) des combles. On a ainsi trois autres contacts.

Rabattant les trois faces vers l'intérieur, sur le plan ABC, on détermine le contact de la sphère (I_4) inscrite dans le trièdre tronqué de sommet D.

Enfin, les contacts des sphères (I_1), (I_2), (I_3) proviennent du rabattement sur ABC de deux faces adjacentes vers l'extérieur, une vers l'intérieur.

5. Dans un tétraèdre équifacial, deux faces rabattues sur un même plan, de part et d'autre de leur arête commune, forment un parallélogramme. Les propriétés suivantes apparaissent alors :

Dans un tétraèdre équifacial :

1° *La sphère inscrite* (I) *touche chacune des faces au centre de son cercle circonscrit ;* (I) *est donc concentrique à la sphère circonscrite et son rayon égale le quart de la hauteur du tétraèdre ;*

2° *Les sphères exinscrites touchent la face correspondante en son orthocentre ; ces sphères sont égales, leur rayon est la moitié de la hauteur du tétraèdre et leurs centres sont les points de la sphère*

circonscrite diamétralement opposés aux sommets;

3° *Il n'existe pas, dans les combles constitués par les plans qui forment le tétraèdre, de sphères tangentes à ces plans.*

Le centre du cercle circonscrit au triangle $D_1D_2D_3$ correspondant, situé en effet sur le cercle circonscrit à ABC, a pour inverse, par rapport à cette face, un point à l'infini.

CORRESPONDANCE.

M. **F. Balitrand.** — *A propos de la transformation par tangentes orthogonales.* — M. M. d'Ocagne vient d'attirer à nouveau l'attention sur la transformation par tangentes orthogonales (*N. A.*, septembre 1919). Il a donné une méthode pour construire le centre de courbure de la transformée d'une courbe donnée. En voici une autre pour effectuer cette construction.

Soit

$$x \cos\varphi - y \sin\varphi - p = 0$$

l'équation de la tangente à une courbe donnée (M). L'équation de la tangente à la courbe transformée (M_1) sera

$$x \sin\varphi - y \cos\varphi - p \operatorname{tang}\varphi = 0.$$

Les deux tangentes seront orthogonales et se couperont en T sur un axe fixe Ox. Si M et M_1 sont deux points correspondants, les normales à ces points à (M) et (M_1) se rencontreront en I sur la perpendiculaire élevée en T à Ox.

En dérivant deux fois l'équation de MT, on obtient, pour les coordonnées du centre de courbure C de (M) en M, les valeurs

$$x = -p' \sin\varphi - p'' \cos\varphi,$$
$$y = \quad p' \cos\varphi - p'' \sin\varphi.$$

Si C′ est le symétrique de C par rapport à I, la parallèle à Ox menée par C′ rencontre MT en un point qui a pour abscisse

$$\frac{p}{\cos\varphi} - \frac{2p\sin^2\varphi}{\cos^3\varphi} + p'\sin\varphi - \frac{2p'\sin\varphi}{\cos^2\varphi} - \frac{p''\sin^2\varphi}{\cos\varphi}.$$

D'autre part, en dérivant deux fois l'équation de M_1T, on obtient pour l'abscisse du centre de courbure C_1 de (M_1) en M_1

$$x_1 = \frac{p}{\cos\varphi} - \frac{2p\sin^2\varphi}{\cos^3\varphi} - p'\sin\varphi - \frac{2p'\sin\varphi}{\cos^2\varphi} - \frac{p''\sin^2\varphi}{\cos\varphi}.$$

De la comparaison des formules précédentes résulte la construction suivante de C_1. On prend le symétrique C′ de C par rapport à I; par C′ on mène une parallèle à Ox qui coupe MT en un certain point; la perpendiculaire abaissée de ce point sur Ox passe par C_1.

F. Balitrand.

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Caen.

Épreuve théorique. — I. 1° *En désignant par z une fonction inconnue, et par* A, B, C *trois fonctions connues*

des deux variables indépendantes x et y, on considère le système des équations simultanées

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = A, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = B, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = C.$$

Former les conditions d'intégrabilité du système; combien y en a-t-il de distinctes?

2° *Déterminer une fonction λ de x et de y de manière que le système*

$$(2)\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (2x^2 - 1)\lambda, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial z \partial y} = 2xy\lambda, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (2y^2 - 1)\lambda$$

soit intégrable, et former dans ce cas son intégrale générale.

Solution. — 1° Les conditions d'intégrabilité du système (1) sont

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}, \qquad \frac{\partial B}{\partial y} = \frac{\partial C}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2};$$

la troisième est une simple conséquence des deux premières.

2° Les conditions qui déterminent λ sont

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = -2x\lambda, \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial y} = -2y\lambda;$$

on en déduit

$$\lambda e^{x^2+y^2} = \text{const.} = C.$$

Le système (2) admet alors pour intégrale générale

$$z = \frac{C}{2} e^{-x^2+y^2} - \alpha x \beta y - \gamma,$$

α, β, γ désignant trois constantes arbitraires.

II. *Une surface étant définie en coordonnées rectangulaires à l'aide des formules*

$$(3)\qquad x = \varphi(u, v), \qquad y = \chi(u, v), \qquad z = \psi(u, v),$$

où u, v désignent deux paramètres arbitraires, quelle est la condition :

1° *Pour que les courbes $u =$ const. forment sur elle un réseau orthogonal?*

2° *Pour qu'elles y forment un réseau conjugué?*

Lorsque ces deux conditions se trouvent à la fois satisfaites, quelle propriété peut-on en déduire relativement aux deux familles de courbes?

Application à la surface définie par les formules

$$(4) \qquad x = \frac{2av^2}{1+u^2+v^2}, \qquad y = ux, \qquad z = v(x-2a),$$

où a désigne une constante donnée.

Solution. — 1° Il faut et il suffit que l'on ait, quels que soient u et v,

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

2° Il faut et il suffit que l'on ait de même

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Lorsque les deux conditions sont satisfaites à la fois, les courbes dont il s'agit constituent les deux séries de lignes de courbure de la surface (3).

Pour la surface particulière (4), qui remplit les deux conditions énoncées, et dont l'équation cartésienne est

$$x(x^2+y^2+z^2) - 2a(x^2+y^2) = 0,$$

les lignes de courbure sont les cercles déterminés par les deux séries de plans

$$y = ux, \qquad z = v(x-2a),$$

respectivement perpendiculaires sur XOY et sur XOZ. En vertu du théorème de Joachimsthal, la normale à la surface (4) tout le long d'un de ces cercles engendre un cône de révolution; le lieu des sommets de ces cônes se compose

de deux paraboles respectivement situés dans les plans XOY, XOZ, et ayant pour équations respectives

$$y^2 + 4a(x - a) = 0, \qquad z^2 - 4ax = 0;$$

en désignant par A le point d'abscisse a situé sur l'axe OX, la première parabole, dont l'ouverture est tournée vers les x négatifs, a pour foyer le point O et pour sommet le point A; la seconde, dont l'ouverture est tournée vers les x positifs, a, inversement, pour foyer le point A et pour sommet le point O.

Épreuve pratique. — *Déterminer une fonction u des trois variables indépendantes x, y, z par la double condition :* 1° *de vérifier l'équation aux dérivées partielles*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial u}{\partial z} + 2u = 0;$$

2° *de se réduire à* e^{y-z} *pour* $x = 0$.

Solution. — $u = e^{\pm x + y - z}$.

(Juillet 1919.)

Épreuve théorique. — I. *Intégrer l'équation aux dérivées partielles*

$$(1) \qquad x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z^2 - x^2 - y^2}{2z},$$

et faire voir que, si x, y, z désignent des coordonnées rectangulaires, l'une quelconque des surfaces intégrales est engendrée par un cercle.

Déterminer, parmi ces surfaces, celle qui contient l'hyperbole

$$(2) \qquad x = a, \qquad z^2 - y^2 = a^2,$$

où a désigne une longueur donnée.

Solution. — Le système différentiel associé s'écrit

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{2z\,dz}{z^2 - x^2 - y^2} = \frac{2(x\,dx - y\,dy - z\,dz)}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Il admet les intégrales premières

$$\frac{y}{x} = C, \qquad \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x} = C',$$

et l'intégrale générale est

$$(3) \qquad \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Toute surface intégrale est engendrable par un cercle tangent en O à l'axe OZ.

La surface (3) étant assujettie à contenir l'hyperbole (2), on doit avoir identiquement

$$\frac{2(a^2 + y^2)}{a} = f\left(\frac{y}{x}\right);$$

ainsi on a, quel que soit t,

$$f(t) = 2a(1 + t^2).$$

On obtient ainsi la surface particulière

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x} = 2a\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)$$

ou

$$x(x^2 - y^2 - z^2) - 2a(x^2 + y^2) = 0.$$

II. *Les axes* OX, OY, OZ *étant supposés rectangulaires, former l'équation générale des surfaces engendrées par une droite qui rencontre constamment l'axe* OZ; *en déduire les formules qui définissent une pareille surface en coordonnées semi-polaires. Chercher, parmi ces surfaces, celles qui jouissent de la propriété que, en désignant par* M *un point quelconque de la surface et par* M′ *sa projection orthogonale sur le plan* XOY, *les tangentes aux deux lignes de courbure qui passent en* M *se projettent sur le plan* XOY *suivant deux droites également inclinées sur* OM′.

Solution. — L'équation générale spécifiée par l'énoncé est

$$z = x\mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right) + \mathrm{H}\left(\frac{y}{x}\right),$$

d'où l'on déduit, par le passage aux coordonnées cylindriques,

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = rf(\theta) + g(\theta).$$

Pour que cette surface remplisse la condition requise, il faut et il suffit, si l'on se reporte à la formule

$$\operatorname{tang} V = r\frac{d\theta}{dr}$$

qui détermine la tangente à une courbe plane en coordonnées polaires, que les deux valeurs de $\frac{dr}{d\theta}$ tirées de l'équation différentielle des lignes de courbure aient une somme nulle, ce qui donne, après suppression du facteur commun r,

$$r(\varphi + \varphi'') + \psi'' = 0.$$

Cette relation devant être vérifiée quels que soient r et θ, on devra avoir séparément $\varphi + \varphi'' = 0$, $\psi'' = 0$. Les surfaces cherchées sont dès lors

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$
$$z = r(A\cos\theta + B\sin\theta) + C\theta + D,$$

où A, B, C, D désignent quatre constantes arbitraires.

Épreuve pratique. — *Former l'intégrale générale du système des équations simultanées*

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= (x^2 + yz)u, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= (xz + y)u, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= (xy + z)u, \end{aligned}\right.$$

où u désigne une fonction inconnue des trois variables indépendantes x, y, z.

Déterminer l'intégrale particulière qui répond à la condition initiale

$$(2) \qquad u = 1 \quad \textit{pour} \quad x = y = z = 0,$$

et, supposant cette intégrale développée suivant les puis-

sances et produits de puissances de x, y, z, indiquer comment on peut, pour construire le développement dont il s'agit, calculer le coefficient du terme en $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ (terme général); effectuer ce calcul pour les divers termes dont le degré total $\alpha + \beta + \gamma$ est égal à 1, 2 ou 3.

Comment peut-on reconnaître, préalablement à toute intégration, que le système proposé est complètement intégrable, c'est-à-dire qu'il admet, de quelque façon que l'on choisisse, les valeurs numériques x_0, y_0, z_0, une intégrale répondant à la condition initiale

$$u = u_0 \qquad \textit{pour} \qquad x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0\,?$$

Effectuer cette vérification.

Solution. — L'intégrale générale du système (1) est

$$u = C e^{\frac{x^3}{3} + xyz + \frac{y^2+z^2}{2}}.$$

où C désigne une constante arbitraire; l'hypothèse $C = 1$ fournit l'intégrale particulière qui répond à la condition initiale (2).

En désignant par $F(x, y, z)$ cette intégrale particulière, le coefficient du terme en $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ dans le développement spécifié par l'énoncé s'obtient en divisant par le produit

$$1.2\ldots\alpha.1.2\ldots\beta.1.2\ldots\gamma$$

la valeur numérique que prend, pour $x = y = z = 0$, la dérivée $\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} F(x, y, z)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}$. Le calcul numérique est immédiat.

Quant au dernier point, il résulte simplement du cours.

(Novembre 1919.)

Grenoble.

Épreuve théorique. — *Intégrer, à l'aide des séries, l'équation*

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} - 2y + a^2 x^2 y = 0.$$

Intégrale générale.

Solution. — Si l'on pose $y = zx$, on arrive à l'équation

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + a^2 z = 0.$$

Ainsi l'intégrale générale est

$$y = x(\mathrm{A}\cos ax + \mathrm{B}\sin ax).$$

On retrouve aisément le même résultat à l'aide des développements en séries fournis par le théorème de Fuchs.

Épreuve pratique. — 1° *Intégrer l'équation*

$$(1+2x)^3 \frac{d^3 y}{dx^3} + 2(1-2x)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 12(1-2x)\frac{dy}{dx} - 64y = \frac{6x}{(1-2x)^{\frac{1}{2}}}.$$

2° *Intégrer l'équation*

$$x^{n+1}\frac{dy}{dx} + 5x^{2n}y^2 + (n-26)x^n y + 5 = 0,$$

soit à l'aide de deux quadratures, soit à l'aide d'une quadrature unique (on pourra d'abord chercher une solution particulière de la forme $y = \alpha x^p$).

Solution. — 1° Si l'on pose $1 - 2x = e^t$, l'équation proposée devient

$$8\left(\frac{d^3 y}{dt^3} - 2\frac{d^2 y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} - 8y\right) = 3\left(e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}\right).$$

L'équation sans second membre a pour équation caractéristique

$$(r-2)(r^2+4) = 0$$

et pour intégrale générale

$$y = \mathrm{A}e^{2t} + \mathrm{B}\sin 2t + \mathrm{C}\cos 2t.$$

L'équation complète admet comme intégrale particulière

$$y = -\frac{1}{17}e^{\frac{t}{2}} + \frac{3}{85}e^{-\frac{t}{2}}.$$

2° Prenons pour fonction inconnue $z = x^n y$; il vient

$$z'x + (z - 5)(5z - 1) = 0.$$

Comme $z = 5$ est une solution évidente de cette équation de Riccati, on posera $z = 5 + \frac{1}{u}$, et l'on aura à intégrer l'équation linéaire

$$u'x - 24u + 5 = 0;$$

on obtient

$$u = Cx^{24} - \frac{5}{24}.$$

L'intégrale générale cherchée est définie par

$$(x^n y - 5)\left(Cx^{24} - \frac{5}{24}\right) = 1.$$

(Juin 1919.)

Épreuve théorique. — I. *On considère la surface définie par les expressions*

$$x = u + (v - 1)\sin u,$$
$$y = 1 + (v - 1)\cos u,$$
$$z = a\left(\frac{u^2}{2} + v\right),$$

où a est une constante et où u et v sont deux paramètres variables.

1° *Trouver toutes les courbes de l'espace dont les tangentes sont parallèles aux droites de la surface. (On se contentera d'exprimer les coordonnées courantes d'un point de la courbe sous forme d'intégrales renfermant une fonction arbitraire.) Déterminer en particulier celles dont le rayon de courbure est constant.*

2° *Trouver les courbes trajectoires orthogonales des droites de la surface.*

3° *Former l'équation différentielle des lignes asymptotiques et montrer que son intégration peut se ramener à une quadrature.*

II. *Deux courbes* C, Γ *se correspondent point par point de manière que les tangentes aux points correspon-*

dants M, μ *soient parallèles. Soient* C_1, Γ_1 *deux courbes rencontrant respectivement toutes les tangentes à* C, Γ; *soient* M_1, μ_1 *les points où ces courbes rencontrent respectivement deux tangentes correspondantes quelconques* MT, $\mu\tau$ *de* C, Γ.

Montrer qu'étant donnée C_1, *on peut choisir* Γ_1 *de manière que sa tangente en tout point* μ_1 *soit parallèle à la tangente à* C_1 *au point correspondant* M_1; *les courbes* Γ_1 *qui jouissent de cette propriété forment une famille dépendant d'un paramètre arbitraire.*

On peut définir C_1 *par la donnée, en fonction de l'abscisse curviligne* s *de point* M, *de la longueur* l *du vecteur* MM_1 *porté sur la tangente* MT *à la courbe* C; *soit* s_1 *l'abscisse curviligne de* M_1 *sur* C_1. *Soient* σ, λ, σ_1 *les quantités analogues relatives à* $\Gamma\Gamma_1$.

Montrer que l'on a

$$\frac{ds + dl}{ds_1} = \frac{d\sigma - d\lambda}{d\sigma_1} \qquad \text{et} \qquad \frac{ds_1}{l} = \frac{d\sigma_1}{\lambda}.$$

Examiner le cas particulier où C_1 *coupe orthogonalement toutes les tangentes* MT *et où* Γ *se réduit à un point.*

Solution. — I. 1° Les courbes demandées sont définies par les relations

$$\frac{dx}{\sin u} = \frac{dy}{\cos v} = \frac{dz}{a} = \frac{ds}{\sqrt{1 + a^2}};$$

$$x = \int \frac{\sin u\, ds}{\sqrt{1 + a_2}}, \qquad y = \int \frac{\cos u\, ds}{\sqrt{1 + a^2}},$$

$$z = \frac{as}{\sqrt{1 + a^2}} + \text{const.},$$

u est une fonction arbitraire de s.

En exprimant que le rayon de courbure est égal à R, on obtient

$$\frac{u'^2}{1 + a^2} = \frac{1}{R^2} \qquad \text{ou} \qquad u = \frac{\sqrt{1 + a^2}}{R}\, s + \text{const.}$$

2° Les trajectoires orthogonales sont définies par la condition que le déplacement dx, dy, dz sur la surface soit per-

pendiculaire à la direction $(\sin u, \cos v, a)$; il vient

$$\sin u\, du + dv + a\, dz = 0$$

ou

$$az + v - \cos u = \text{const.}$$

3° L'équation générale des asymptotiques est

$$D\, du^2 + 2\, D'\, du\, dv + D''\, dv^2 = 0,$$

les déterminants de Gauss ayant pour valeurs respectives

$$D = av[\cos u - (v - 1)], \qquad D' = a[\sin u - u], \qquad D'' = 0.$$

La solution $du = 0$ correspond aux génératrices rectilignes. Les asymptotiques proprement dites sont définies par l'équation linéaire en $\frac{1}{v}$,

$$2(u - \sin u)\frac{d}{du}\left(\frac{1}{v}\right) - \frac{1 - \cos u}{v} + 1 = 0.$$

Comme l'équation sans dernier terme a pour intégrale

$$v^2(u - \sin u) = \text{const.},$$

l'intégration est ramenée à une quadrature.

II. Soient (x, y, z), (x_1, y_1, z_1), (ξ, η, ζ), (ξ_1, η_1, ζ_1) les coordonnées des points M, M_1, μ, μ_1; (α, β, γ) les cosinus directeurs des tangentes parallèles en M et M_1. On a

$$x_1 = x + l\alpha, \qquad \ldots, \qquad \xi_1 = \xi - \lambda\alpha, \qquad \ldots.$$

Le parallélisme des tangentes à C_1 et à Γ_1 en M_1 et μ_1 se traduit par les relations

$$\frac{\alpha(ds + dl) - l\, d\alpha}{ds_1} = \frac{\alpha(d\sigma + d\lambda) - \lambda\, d\alpha}{d\sigma_1}, \qquad \ldots,$$

qui, multipliées respectivement par α, β, γ, puis par $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ et ajoutées membres à membres, donnent les relations demandées

$$\frac{ds + dl}{ds_1} = \frac{d\sigma + d\lambda}{d\sigma_1}, \qquad \frac{l}{ds_1} = \frac{\lambda}{d\sigma_1}.$$

Soient

$$x = f(s), \qquad y = g(s), \qquad z = h(s)$$

les équations de la courbe (C); $\sigma = F(s)$ une relation de correspondance; la courbe Γ aura pour équations

$$\xi = \int f'(s) F'(s)\, ds, \qquad \eta = \int g'(s) F'(s)\, ds,$$
$$\zeta = \int h'(s) F'(s)\, ds.$$

Soit donnée $l(s) = MM_1$; nous aurons, pour déterminer

$$\lambda(s) = \mu\mu_1,$$

la relation

$$\frac{ds + dl}{l} = \frac{d\sigma + d\lambda}{\lambda},$$

qui est une équation linéaire du premier ordre

$$\frac{d\lambda}{ds} - \frac{1 + l'}{l}\lambda + F'(s) = 0.$$

L'expression générale de $\lambda(s)$ contiendra bien un paramètre arbitraire.

Le cas particulier proposé correspond à

$$dl + ds = 0 \qquad \text{ou} \qquad 1 + l' = 0,$$

et à

$$d\xi = d\eta = d\zeta = 0 \qquad \text{ou} \qquad F'(s) = 0;$$

alors λ est constant et la courbe Γ_1 est une indicatrice sphérique de C.

Épreuve pratique. — 1° *Trouver l'intégrale générale de l'équation*

$$(x - 1)y'' + (4x - 5)y' + (4x - 6)y = xe^{-2x}.$$

2° *Trouver l'intégrale particulière qui s'annule ainsi que sa dérivée première pour* $x = 0$.

Solution. — Posons $y = e^{-2x} z$; l'équation proposée devient

$$(x - 1)z'' - z' = x$$

ou

$$\frac{z'}{x-1} = \int \frac{x\,dx}{(x-1)^2}.$$

L'intégrale générale est

$$2yl^{2x} = x - 2(x-1) + (x-1)^2[3 + \mathrm{L}(1-x)].$$

L'intégrale particulière spécifiée est donnée par

$$4ye^{2x} - 3x^2 - 2x - 2(x-1)^2\mathrm{L}(1-x) = 0.$$

(Novembre 1919.)

Clermont-Ferrand.

Épreuve théorique. — *On considère la surface engendrée par la révolution d'une cycloïde autour de sa tangente en sommet.*

1° *Déterminer les lignes asymptotiques de cette surface;*

2° *Prouver que, si l'on considère les deux surfaces engendrées par la révolution de deux cycloïdes de paramètres différents, on peut faire correspondre les points de l'une à ceux de l'autre, de telle manière que les méridiens de l'une correspondent aux méridiens de l'autre, les parallèles aux parallèles et que les arcs de deux courbes correspondantes quelconques soient toujours égaux.*

Solution. — Cette question a été posée à Paris en novembre 1891 exactement dans les mêmes termes; elle est résolue dans les *Compositions d'Analyse* d'Ed. Villié, tome III, page 84. Les asymptotiques se projettent sur le plan équatorial suivant les spirales

$$r = \frac{2a}{\mathrm{ch}^2\dfrac{\theta-\theta_0}{\sqrt{2}}}.$$

Les lois d'association des parallèles et des méridiens sont, en marquant de l'indice 1 les éléments de la seconde surface,

$$ar = a_1 r_1, \qquad \frac{\theta}{a} = \frac{\theta_1}{a_1}.$$

Épreuve pratique. — *On considère l'équation de Riccati*

$$\frac{dy}{dx}\cos 2x = 2 + X'\sin 2x - 2\left(X' + \frac{1}{\sin 2x}\right)y + y^2 X'\sin 2x,$$

dans laquelle X′ *désigne la dérivée d'une fonction donnée* X *de* x.

1° *Démontrer qu'elle admet deux solutions particulières dont le produit est égal à l'unité;*

2° *Déterminer son intégrale générale.*

Solution. — Cette question a été posée à Toulouse en novembre 1891 exactement dans les mêmes termes; elle est résolue dans l'Ouvrage cité plus haut, tome III, page 29. En exprimant que $\frac{1}{y}$ vérifie la même équation et en éliminant $\frac{dy}{dx}$, on trouve une équation du second degré donnant les deux solutions particulières $y_1 = \tang x$, $y_2 = \cot x$.

L'intégrale générale est définie par

$$\frac{y - \cot x}{y - \tang x} = C e^{2X}.$$

(Novembre 1919.)

CHRONIQUE.

États-Unis. — La *Mathematical Association of America* a tenu les 1er et 2 janvier 1920 sa quatrième réunion annuelle, sous la présidence de H.-E. Hawkes.

Programme : « Mathematics in Relation to the Allied Sciences ». — Conférences : les mathématiques du physiologiste et du médecin; — de l'étudiant en

physique; — du minéralogiste; — de la biométrie; — de la chimie physique.

Sorbonne. — M. Pompeiu, professeur à l'Université de Bucarest, agréé à l'Université de Paris, fera le mercredi et le vendredi, à 4^h, à partir du 20 février, une série de leçons sur la monogénéité des fonctions d'une variable complexe (amphithéâtre Chasles).

Nominations. — Lille. — M. Chazy, professeur de Mathématiques générales, est nommé professeur d'Analyse mathématique, en remplacement de M. Demartres, décédé.

M. Chatelet, maître de conférences de Mécanique, est nommé professeur de Mathématiques générales, en remplacement de M. Chazy.

Publications récentes. — I. E. Vessiot. — *Leçons de Géométrie supérieure*, 1 vol. gr. in-8, de x-376 pages, Hermann, éditeur. Prix : 30^{fr}.

Les leçons ont été professées, à la Faculté des Sciences de Lyon, en 1905-1906 pour répondre au programme spécial d'Analyse mathématique de l'Agrégation. Elles ont été alors rédigées par M. Anzemberger et autographiées à très petit nombre. Elles paraissent aujourd'hui imprimées après mise au point, avec une intéressante préface de M. Kœnigs.

Voici l'énumération des titres des Chapitres : I. Révision des points essentiels de la théorie des courbes gauches et des surfaces développables. — II. Surfaces. — III. Étude des éléments fondamentaux des courbes d'une surface. — IV. Les six invariants. La courbure totale. — V. Surfaces réglées. — VI. Congruences de droites. — VII. Congruences de normales. — VIII. Les

congruences de droites et les correspondances entre deux surfaces. — IX. Les complexes de droites et les équations aux dérivées partielles du premier ordre. — X. Complexes linéaires. — XI. Transformations de contact. Transformations dualistiques. Transformation de Lie, changeant les droites en sphères. — XII. Systèmes triples orthogonaux. — XIII. Congruences de sphères et systèmes cycliques.

Soixante problèmes d'application sont proposés : la plupart sont de l'ordre de difficulté des questions données au Concours d'Agrégation.

La rédaction est très claire, l'exposition simple et suggestive. L'Ouvrage est un modèle pédagogique à recommander à nos lecteurs.

H. C. de la Vallée Poussin. — *Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle.* 1 vol. gr. in-8 de VIII-150 pages. Gauthier-Villars et Cie, éditeurs. Prix : 12fr.

Les leçons ont été professées à la Sorbonne en mai-juin 1918. Leur objet est d'étudier les relations du problème de l'approximation la meilleure d'une fonction d'une variable réelle sous forme finie avec la continuité, avec les propriétés différentielles de la fonction, ou, dans le cas d'une fonction analytique, avec la nature et la position des points singuliers. L'auteur part des théories classiques de Weierstrass, et examine les approximations par les séries de Fourier, par les sommes de Fejér, par les polynomes.

La rédaction est limpide ; l'exposition met en évidence la pénétration de disciplines très diverses.

Les travaux de Léauté en Mécanique ont montré jadis que des recherches de ce genre sont susceptibles d'applications pratiques.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1886.

(1900, p. 573; 1917, p. 399.)

Si l'on inscrit dans une circonférence un quadrilatère quelconque ABCD *et un rectangle* EFGH, *dont les diagonales* EG *et* FH *sont perpendiculaires aux diagonales* AC *et* BD *du quadrilatère* ABCD, *les quatre côtés des deux quadrilatères se coupent en seize points qui sont, quatre par quatre, sur des lignes droites* I, J, K, L. *La polaire du point d'intersection de deux quelconques de ces quatre droites par rapport à la circonférence passe par l'intersection des deux autres droites.* L. Klug.

Solution

Par M. R. B.

Donnons à l'énoncé une forme projective. Nous considérerons deux quadrilatères $ABA'B'$, $\alpha\beta\alpha'\beta'$ inscrits à une même conique C, et tels que les diagonales AA' et $\beta\beta'$ soient conjuguées par rapport à C, ainsi que BB' et $\alpha\alpha'$. Il faut démontrer que ces deux quadrilatères ont les propriétés indiquées.

Rappelons que : *si* P *et* Q *sont les points doubles de deux divisions homographiques sur une conique* C, *et si* (M, M'), (N, N') *sont deux couples de points correspondants des deux divisions*, MN' *et* NM' *se coupent sur* PQ. On reconnaît en effet immédiatement que, si MN' et NM' se coupent sur PQ, le point N' correspond au point N dans l'homographie définie par les couples (P, P), (Q, Q), (M, M').

Cela posé, il résulte de l'hypothèse que les divisions $(A\beta A'\beta')$ et $(\alpha B\alpha' B')$ sont toutes deux harmoniques, donc en correspondance homographique. Il existe donc, en vertu du lemme rappelé, une droite I contenant les points

$$(AB, \alpha\beta), (BA', \beta\alpha'), (A'B'. \alpha'\beta'). (B'A, \beta'\alpha).$$

On peut, sans changer l'ordre des points de la première division, permuter dans la seconde α et α', B et B', soit séparément, soit simultanément. Cette division ne cessera pas d'être harmonique, de sorte que le raisonnement s'applique toujours. On établit ainsi l'existence des trois autres droites J, K L, contenant :

J, les points

$$(AB,\ \alpha'\beta),\ (BA',\ \beta\alpha),\ (A'B',\ \alpha\beta'),\ (B'A,\ \beta'\alpha');$$

K, les points

$$(AB',\ \alpha\beta),\ (B'A',\ \beta\alpha'),\ (A'B,\ \alpha'\beta'),\ (BA,\ \beta'\alpha);$$

L, les points

$$(AB',\ \alpha'\beta),\ (B'A',\ \beta\alpha),\ (A'B,\ \alpha\beta'),\ (BA,\ \beta'\alpha').$$

La première partie de l'énoncé est ainsi établie. Pour établir la seconde, observons, qu'outre les points déjà considérés :

I contient	$(A\alpha',\ A'\alpha)$	et	$(B\beta',\ B'\beta)$;
J contient	$(A\alpha,\ A'\alpha')$	et	$(B\beta',\ B'\beta)$;
K contient	$(A\alpha',\ A'\alpha)$	et	$(B'\beta',\ B\beta)$;
L contient	$(A\alpha,\ A\alpha')$	et	$(B'\beta',\ B\beta)$.

Par conséquent, I et J par exemple se coupent en $(B\beta',\ B'\beta)$ et K et L en $(B'\beta',\ B\beta)$. Or ces deux points sont conjugués par rapport à C, Donc, etc.

2038.

(1906, p. 14; 1918, p. 468.)

On mène les hauteurs AD, BE, CF *du triangle* ABC. *Soient* D_1 E_1 F_1 *l'axe d'homologie des triangles* ABC, DEF. *Par* E_1, F_1, D_1 *on mène les parallèles à* AB, BC, CD *qui coupent* BC, BA, AB *aux points* I, H, K, *en ligne droite, et les parallèles à* BC, CA, AB *qui coupent* AB, BC, CA *aux points* K_1, I_1, H_1, *aussi en ligne droite. Soient* Q *et* Q_1 *les coniques circonscrites à* ABC *et tangentes, la première à* AI, BH, CK *et la seconde à* AI_1, BH_1, CK_1.

I. *Si par un point* O *de* Q *on mène des perpendiculaires à* BC, CA, AB, *elles coupent* CA, AB, BC *en* μ, ν, λ *et l'on*

a la droite $\Delta(\lambda, \mu, \nu)$. *Ces mêmes perpendiculaires menées par un point* O_1 *de* Q_1 *coupent* AB, BC, CA *aux points* ν_1, λ_1, μ_1 *et l'on a la droite* $\Delta(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$.

II. *Les coniques* Q *et* Q_1 *et le cercle* ABC *ont un quatrième point commun* ω *auquel correspondent deux droites* Δ *et* Δ_1 *et la droite de Simson* Δ_2.

III. *Si* ABC *est un triangle équilatéral, les coniques* Q, Q_1 *se superposent au cercle* ABC *et à tout point* O *de ce cercle correspondent trois droites* Δ, Δ_1, Δ_2. P. Sondat.

Solution
Par M. R. Bouvaist.

La proposition à démontrer est un cas particulier de la suivante, qui n'est d'ailleurs que le théorème de Simson, énoncé sous sa forme la plus générale.

Soient ABC *un triangle donné;* D_A, D_B, D_C *trois directions données, le lieu des points* M *tels que les parallèles menées par* M *à* D_A, D_B, D_C *rencontrent* BC, CA, AB *respectivement en trois points en ligne droite est une conique* Q_1 *circonscrite à* ABC, *et coupant la droite de l'infini en ses points d'intersection avec les rayons doubles de l'homographie déterminée par les trois courbes de rayons* BC *et* D_A, CA *et* D_B, AB *et* D_C.

La tangente à Q_1 *en* A *par exemple est le rayon conjugué de la direction* BC *dans l'involution ayant pour couples de rayons* AB *et* AC *et les directions asymptotiques de* Q_1.

En faisant correspondre aux côtés BC, CA, AB, *les directions* D_B, D_C, D_A, *puis* D_C, D_A, D_B, *on obtient de même deux coniques* Q_2 *et* Q_3. *Les trois coniques* Q_1, Q_2, Q_3 *font partie d'un même faisceau ponctuel.*

Si en effet on prend pour axes CA et CB, si $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0$ est l'équation de AB, si m_1, m_2, m_3 désignent les coefficients angulaires de D_A, D_B, D_C, l'équation de Q_1 est

$$\frac{1}{a}x(m_3 - m_2)(m_1 x - y) - \frac{1}{b}y(m_3 - m_1)(y - m_2 x)$$
$$- y[y(m_1 - m_3) + x m_1(m_3 - m_2)] = 0,$$

sur laquelle les propriétés de l'énoncé ci-dessus se vérifient immédiatement.

Les équations de Q_2 et Q_3 s'obtiennent par permutation cir-

culaire de m_1, m_2, m_3 et l'on a évidemment $Q_1 + Q_2 + Q_3 \equiv 0$. Les directions asymptotiques de Q_1, Q_2 et Q_3 sont d'ailleurs par leur détermination même en involution; ces trois coniques ayant déjà trois points communs, A, B, C en ont donc un quatrième.

La troisième partie découle évidemment de la propriété énoncée ci-dessus et l'on peut ajouter à l'énoncé que *dans le cas du triangle équilatéral les trois droites* Δ, Δ_1, Δ_2 *forment un triangle équilatéral.*

2039.

(1906, p. 144; 1917, p. 468.)

Démontrer la relation

$$(1)\quad \sum \frac{f'''(\alpha)}{[f'(\alpha)]^2 f''(\alpha)} + \sum \frac{f''(\beta)}{[f''(\beta)]^2 f(\beta)} + \sum \frac{1}{f(\gamma) f'(\gamma)} = 0,$$

la première somme s'étendant à toutes les racines supposées distinctes de l'équation algébrique $f(x) = 0$; *la deuxième, à toutes les racines supposées distinctes de* $f'(x) = 0$; *la troisième, à toutes les racines supposées distinctes de* $f''(x) = 0$.

Étendre la relation (1) *en faisant intervenir les dérivées quatrième, cinquième, etc. du polynome* $f(x)$.

NICOLAS KRYLOFF.

SOLUTION
Par M. LOUIS POLI.

La question est assez simple, mais une erreur d'impression a dû retarder l'envoi d'une solution. Il faut lire, pour la seconde somme, $\sum \frac{f'''(\beta)}{[f''(\beta)]^2 f(\beta)}$.

J'ajoute qu'on doit supposer les racines de $f(x) = 0$ distinctes non seulement de celles de $f'(x) = 0$ [ce qui est évident, sans cela $f(x) = 0$ aurait une racine double]; mais même distinctes des racines de $f''(x)$. Sans cela, pour cette racine, la première et la dernière somme deviennent infinies.

On sait que la somme $\sum \frac{P(x)}{Q'(x)}$ étendue à toutes les racines supposées distinctes de $q(x) = 0$ est égale à 0 si le degré de Q surpasse au moins de 2 celui de P.

Faisons dans cette identité $Q = \varphi\chi\psi\theta$, ...

Les racines de Q seront celles de φ, celles de χ, celles de ψ, etc. et Q′ pour une racine α de φ par exemple se réduira à $Q'_{(\alpha)} = \varphi'(\alpha)\chi(\alpha)\psi(\alpha)\theta(\alpha)$.

L'identité en question s'écrit donc

$$\sum \frac{P(\alpha)}{\varphi'\chi\psi\theta} + \sum \frac{P(\beta)}{\varphi\chi'\psi\theta} + \sum \frac{P(\gamma)}{\varphi\chi\psi'\theta} + \sum \frac{P(\delta)}{\varphi\chi\psi\theta'} + \ldots = 0$$

La première somme doit s'étendre à toutes les racines de φ, la seconde à celles de χ, ...

En particulier, si l'on fait $\varphi = f(x)$, $\chi = f'$, $\psi = f''$, ..., et $p = f^{(n)}$, il viendra

$$\sum \frac{f^{(n)}(x)}{f'^2 f'' f''' \ldots f^{\mu}} + \sum \frac{f^{(n)}(x)}{f f''^2 f''' \ldots f^{\mu}} + \ldots$$
$$+ \sum \frac{f^{(n)}(x)}{f f' \ldots f^{(\mu-1)} f^{(\mu+1)}} = 0.$$

La première somme s'étend aux racines de $f = 0$, la seconde aux racines de f', ...

Le cas du texte correspond à $n = 3$, $\mu = 2$.

QUESTION.

2435. Pour que l'équation

$$(a\lambda + a')\, x^m + (b\lambda + b')\, x^{m-1} + \ldots = 0$$

ait toutes ses racines réelles quel que soit λ, il faut et il suffit que, pour deux valeurs particulières de λ, l'équation ait toutes ses racines réelles, les racines qui correspondent à l'une des valeurs alternant avec celles qui correspondent à l'autre valeur quand on range ces $2m$ racines dans l'ordre des valeurs croissantes ; et la même chose a alors lieu si l'on donne à λ deux valeurs quelconques. Indiquer la forme de la courbe qui représente les m racines pour les diverses valeurs de λ, avec un axe des x et un axe des λ. (On pourra supposer d'abord que les deux valeurs particulières de λ sont o et ∞.)

G. Fontené.

[R8e]

EXPOSÉ ÉLÉMENTAIRE D'UNE THÉORIE RIGOUREUSE DES LIAISONS FIXES UNILATÉRALES;

PAR M. ÉT. DELASSUS [1].

(*Suite.*)

ÉTUDE DU SOLIDE REPOSANT SUR UN PLAN FIXE PAR TROIS POINTS.

12. L'étude d'une liaison unilatérale triple conduit, comme nous l'avons vu, à la considération d'une figure de l'espace ne présentant pas la même commodité qu'une figure plane, comme celle obtenue pour une liaison unilatérale double.

On peut néanmoins, pour certaines liaisons unilatérales triples, représenter la discussion au moyen d'une figure plane. C'est ce qui arrive pour un solide reposant sur un plan fixe par un nombre quelconque de points ou par une face plane polygonale à côtés rectilignes et même à côtés curvilignes. Nous nous bornerons ici au cas le plus simple, celui de trois points de contact.

Pour arriver au résultat cherché, nous introduirons la réaction totale, qui est ici une force unique N normale au plan H, et nous considérerons son pied ω comme appartenant à la face libre ou positive H^+ si N est positive, et à la face négative H^- si N est négative. En définitive, nous considérons N comme une flèche matérielle tenue normalement au contact du plan H

(1) *Voir* même Tome, p. 1.

réalisé matériellement par une plaque métallique. Dans ces conditions, le point ω peut parcourir l'étendue complète des deux faces de H.

Nous allons faire l'étude directe des régions de possibilité des divers mouvements, régions où doit se trouver ω, et, comme conséquence de la théorie générale, nous saurons que ces régions rempliront complètement et sans empiéter les unes sur les autres la totalité de l'espace qui est ici l'ensemble des deux faces de H.

13. La région $M_{A_1A_2A_3}$ est caractérisée (théorie générale) par la condition que les trois réactions partielles soient positives, donc que la réaction totale N soit positive et à l'intérieur du triangle de sustentation A_1, A_2, A_3. Le point ω doit donc être sur H^+ et intérieur à ce triangle, de sorte que la région $M_{A_1A_2A_3}$ est le triangle de sustentation tracé sur la face H^+, face sur laquelle repose le solide.

14. Cherchons maintenant la région M_l. Si nous prenons des axes mobiles x, y, z attachés au solide, Gz étant perpendiculaire au plan $A_1A_2A_3$ et du côté positif, si nous désignons par $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, u, v$ les deux premières coordonnées des points A_1, A_2, A_3, ω, nous aurons pour équations du mouvement $M_{A_1A_2A_3}$ à l'instant initial,

$$M a'' = \ldots, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial p}\right) + \ldots = \quad N v + \ldots,$$

$$M b'' = \ldots, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial q}\right) + \ldots = -N u + \ldots,$$

$$M c'' = N + \ldots, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial r}\right) + \ldots = \ldots$$

$$(c'' = p' = q' = 0)$$

et pour M_ℓ,

$$M a'' = \ldots \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial p}\right) + \ldots = 0 - \ldots$$

$$M b'' = \ldots \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial q}\right) - \ldots = 0 - \ldots,$$

$$M c' = 0 + \ldots \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial r}\right) - \ldots = \ldots$$

avec les conditions de possibilité à l'instant initial

$$\frac{d}{dt}(c'' - p'y_1 - q'x_1) = c'' - p'y_1 - q'x_1 > 0,$$
$$c'' - p'y_2 - q'x_2 > 0,$$
$$c'' - p'y_3 - q'x_3 > 0,$$

exprimant que les trois points A_1, A_2, A_3 se soulèvent du côté libre.

En faisant la soustraction des équations correspondantes et désignant par a'', b'', c'', p', q', r', non plus ces quantités elles-mêmes, mais leurs variations quand on passe de $M_{A_1A_2A_3}$ à M_ℓ, on aura

$$M c'' = -N,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial p'} = -Nv, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial q'} = Nu, \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial r'} = 0,$$

et, en vertu de ce que c'', p', q' sont nuls dans le premier mouvement, les trois inégalités de possibilité gardent la même forme.

Si l'on appelle $\Phi(X, Y, Z)$ la forme quadratique adjointe de $F(X, Y, Z)$ et si l'on pose

$$\Theta(u, v) = \Phi(-v, u, 0),$$

on en déduira

$$p' = N\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial X}(-v, u, 0) = -N\frac{1}{2}\frac{\partial\Theta}{\partial v},$$

$$q' = N\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial Y}(-v, u, 0) = \quad N\frac{1}{2}\frac{\partial\Theta}{\partial u},$$

de sorte que si l'on considère la forme polaire

$$\Omega(M, \omega) = x\frac{1}{2}\frac{\partial\Theta}{\partial u} + y\frac{1}{2}\frac{\partial\Theta}{\partial v} + \frac{1}{M} = u\frac{1}{2}\frac{\partial\Theta}{\partial x} + v\frac{1}{2}\frac{\partial\Theta}{\partial y} + \frac{1}{M}$$

de l'*ellipse imaginaire*

$$\Theta(X, Y) + \frac{1}{M} = 0,$$

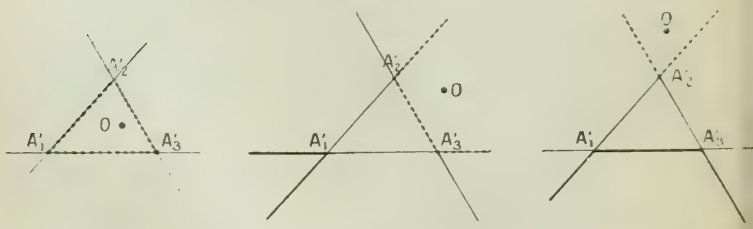
les trois conditions de possibilité prendront la forme simple

$$N\Omega(A_1, \omega) < 0, \qquad N\Omega(A_2, \omega) < 0, \qquad N\Omega(A_3, \omega) < 0.$$

Si $N > 0$, elles indiquent que ω est sur H^- dans la région commune aux côtés positifs des polaires de A_1, A_2, A_3, région commune existant forcément et contenant le point $O(0,0)$ qui donne le signe *plus* dans la polaire d'un point quelconque. Si $N < 0$, elles indiquent que ω est sur H^+ dans la région commune aux côtés négatifs des trois polaires, région qui peut, suivant les cas, exister ou ne pas exister.

Si nous convenons de représenter en traits pleins, comme choses vues, ce qui est sur H^+ et en traits ponctués, comme choses cachées, ce qui est sur H^-, nous aurons les trois figures suivantes (*fig.* 1) qui

Fig. 1.



montrent que le pôle A'_1 d'un côté A_2A_3 doit être considéré comme appartenant à H^- s'il est du côté O de $A'_2A'_3$ polaire de A_1 : c'est-à-dire si O et A_1 sont

d'un même côté de $A_2 A_3$. Si nous convenons d'appeler côté intérieur d'un côté du triangle de sustentation celui qui contient ce triangle, nous constatons que la figure, dans ses trois cas, est construite de la façon suivante :

Chaque côté du triangle de sustentation pour lequel O est du côté intérieur donne un pôle sur H^-. Chaque côté pour lequel O est du côté extérieur donne un pôle sur H^+. Pour obtenir M_l on adopte la règle suivante de jonction :

Deux points sur H^+ se joindront intérieurement par un trait plein.

Deux points sur H^- se joindront intérieurement par un trait ponctué.

Un point de H^+ et un point de H^- se joindront extérieurement, la demi-droite partant du point de H^+ étant en trait plein et celle partant du point de H^- en trait ponctué.

Il est d'ailleurs bon de remarquer que cette règle de jonction est précisément celle de la perspective d'un triangle traversé par le plan issu de l'œil et parallèle au plan du Tableau. Les trois figures sont celles de la perspective du triangle $A'_1 A'_2 A'_3$ en supposant 3, 2 ou 1 sommets situés en arrière de ce plan.

15. Étudions la région $M_{A_2 A_3}$. On aura une réaction N_1 appliquée en un point ω_1 de $A_2 A_3$, donc les équations à l'instant initial

$$M c'' = N_1 + \ldots,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial p}\right) + \ldots = N_1 c_1 + \ldots, \qquad c'' + p' y_2 - q' x_2 = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial q}\right) + \ldots = -N_1 u_1 + \ldots, \qquad c'' + p' y_3 - q' x_3 = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial r}\right) + \ldots = \ldots,$$

avec les conditions de possibilité

$$c'' + p'y_1 - q'x_1 > 0,$$
$$N_1 > 0, \qquad \omega_1 \text{ entre } A_2 \text{ et } A_3.$$

En retranchant les équations de $M_{A_1A_2A_3}$ comme précédemment et introduisant le point P d'égal moment de N et N_1 et de coordonnées

$$\frac{Nu - N_1u_1}{N - N_1}, \quad \frac{Nc - N_1c_1}{N - N_1},$$

on obtiendra finalement les égalités

$$\Omega(P, A_2) = 0, \qquad \Omega(P, A_3) = 0,$$

montrant que P est le pôle A'_1 de A_2, A_3, ce qui donne la construction de ω_1 et N_1, puis les conditions

$$(N - N_1)\Omega(A'_1, A_1) < 0,$$
$$N_1 > 0, \qquad \omega_1 \text{ entre } A_2 \text{ et } A_3.$$

Comme $\Omega(A'_1, A_1)$ est positif ou négatif suivant que A'_1 est sur H^- ou sur H^+, donc a un signe connu, il reste deux inégalités relatives à N et la condition relative à ω_1; une discussion très facile conduit alors, pour ω, à la région obtenue en joignant A_2, A_3, A'_1 par la règle de perspective énoncée déjà pour M_l.

16. Étudions de même la région M_{A_1}. On aura une réaction N_1 appliquée en A_1, donc les équations initiales

$$\begin{aligned} Mc'' &= N_1 + \ldots, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial p}\right) + \ldots &= N_1y_1 + \ldots, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial q}\right) + \ldots &= -N_1x_1 + \ldots, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial r}\right) + \ldots &= \ldots, \end{aligned} \qquad c'' + p'y_1 - q'x_1 = 0,$$

avec les conditions

$$c'' + p'y_2 - q'x_2 > 0, \quad c'' + p'y_3 - q'x_3 > 0, \quad N_1 = 0.$$

En opérant toujours de la même façon, introduisant le point P d'égal moment de N et N_1, on obtiendra l'équation

$$\Omega(P, A_1) = 0,$$

montrant que P est l'intersection de ωA_1 avec A'_2, A'_3 polaire de A_1, ce qui donne la construction de N_1, puis les conditions

$$(N - N_1)\Omega(P, A_2) < 0, \quad (N - N_1)\Omega(P, A_3) < 0, \quad N_1 > 0,$$

d'où résulte

$$\Omega(P, A_2)\,\Omega(P, A_3) = 0.$$

Cette dernière montre facilement que P doit se trouver, non en un point quelconque de la droite A'_2, A'_3, mais en un point de la ligne de jonction de A'_2 et A'_3 au sens adopté précédemment. Alors, $\Omega(P, A_2)$ et $\Omega(P, A_3)$ ont des signes connus, et il reste des inégalités en N montrant aisément que ω doit être situé dans la région obtenue en joignant A'_2, A'_3, A_1 toujours par la règle de perspective.

17. En définitive, *les régions d'échappement simple s'obtiennent par jonction des côtés de* $M_{A_1A_2A_3}$ *aux sommets correspondants de* M_l *et les régions d'échappement double en joignant les sommets de* $M_{A_1A_2A_3}$ *aux côtés correspondants de* M_l.

On obtiendra de cette façon huit régions remplissant entièrement les deux faces de H sans superposition, et constituant un double diagramme plan qui, d'après sa construction même, ne dépend ni de la position, ni du mouvement du solide. On doit plutôt le considérer comme une figure invariable attachée au solide et

tracée sur les deux faces du plan $A_1 A_2 A_3$ de ce solide.

Le solide étant lancé sur la liaison et prenant le mouvement $M_{A_1A_2A_3}$, ce mouvement se continuera tant que le point ω qui va se déplacer dans le diagramme ne sortira pas de la région $M_{A_1A_2A_3}$.

Il peut en sortir de deux façons :

Le point ω, sans sortir, au point de vue géométrique, du triangle $M_{A_1A_2A_3}$ peut, à un certain moment, passer sur H^- et alors il sort de la région $M_{A_1A_2A_3}$ de H^+ pour entrer dans une région de H^- qu'on ne peut préciser *a priori* et qui est variable suivant les cas. C'est l'échappement par changement de signe de la réaction totale.

Le point ω peut, tout en restant sur H^+, sortir de $M_{A_1A_2A_3}$ en traversant son contour en un point d'un côté ou en un sommet; quand la sortie s'effectue par un côté, on entre forcément dans la région d'échappement du sommet opposé; mais quand elle s'effectue par un sommet, on tombe dans une région pouvant varier suivant les cas.

LES LIAISONS UNILATÉRALES ET LES PERCUSSIONS.

18. Si le système, au lieu d'être soumis à des forces, est soumis à des percussions données provoquant des percussions de réaction ou même n'est soumis à aucune percussion donnée, mais uniquement à des percussions de réaction par suite d'un choc supposé essentiellement inélastique, on pourra refaire exactement les mêmes théories que précédemment, sauf les modifications suivantes :

Au lieu de raisonner sur les q'', on raisonne sur les q'.

Les p, au lieu d'être les variations des q'' quand on passe du mouvement sur la liaison totale au mouvement réduit, seront les augmentations des variations des q' quand on passe de la percussion sur la liaison totale à la percussion sur la liaison réduite.

On retrouvera ainsi les mêmes équations aux p que dans la théorie relative aux forces ainsi que les mêmes conditions de possibilité, de sorte que : *Les diagrammes de toute nature trouvés pour le mouvement sous l'action des forces s'appliquent sans aucune modification au système matériel soumis à des percussions;* ils fournissent les échappements par percussion au moyen de la percussion totale de réaction de la liaison totale considérée comme liaison forcée.

ÉTUDE DU TRÉPIED SYMÉTRIQUE.

19. La base de sustentation A_1, A_2, A_3 est ici un triangle équilatéral dont O est le centre, et la conique Θ est le cercle imaginaire

$$X^2 - Y^2 - \frac{I}{M} = 0.$$

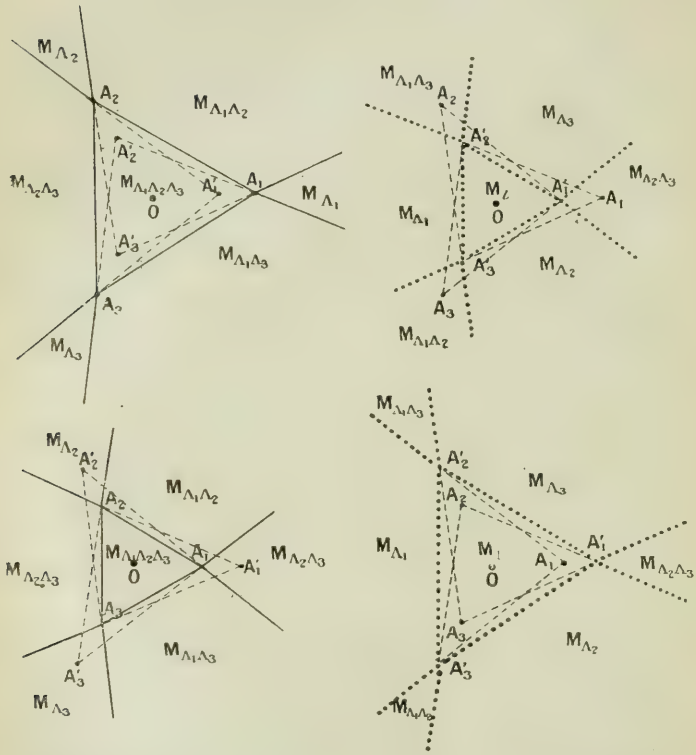
I étant le moment d'inertie du trépied par rapport à son axe Gz.

Les trois points A'_1, A'_2, A'_3 seront tous trois sur H^-, puisque le point O est du côté intérieur de chacun des côtés de A_1, A_2, A_3, et formeront un triangle équilatéral concentrique et homothétique de la base de sustentation; si nous désignons par $2b$ et b le rayon et l'apothème de $M_{A_1A_2A_3}$, le rayon et l'apothème de M_l seront $\frac{I}{Mb}$ et $\frac{I}{2Mb}$, de sorte que le triangle M_l sera plus petit que $M_{A_1A_2A_3}$ si $\frac{I}{M} < 2b^2$ et plus grand dans

le cas contraire. On aura ainsi les diagrammes suivants (*fig.* 2).

Ces diagrammes permettent de faire l'étude com-

Fig. 2.



plète des échappements du trépied, soit sous l'action de forces, soit sous l'action de percussions.

Proposons-nous de faire l'application au cas du trépied soumis à une percussion donnée P que nous supposerons d'abord ne pas être parallèle à H et que, par conséquent, nous pourrons toujours supposer être appliquée au point Ω où sa ligne d'action perce le

plan H_G mené par G parallèlement à H. Les coordonnées de ce point seront α, β, o, et l'on aura les équations de percussion sur la liaison totale

$$Mc' = X - N,$$

$$\begin{aligned} Ip &= Z\beta + Nv, \\ Iq &= -Z\alpha - Nu, \\ Ir &= Y\alpha - X\beta, \end{aligned} \qquad c' = p = q = o.$$

donnant

$$N = -Z, \qquad u = \alpha, \qquad v = \beta,$$

de sorte que ω est la projection horizontale de Ω, et doit être considéré comme appartenant à H^+ si P est descendante, et à H^- si P est ascendante.

Plus particulièrement, supposons que Ω soit dans le plan de symétrie A_1OGz; alors ω est sur la droite indéfinie OA_1, et si nous désignons par α son abscisse sur l'axe OA_1, on voit immédiatement que si P est descendante (diagramme H^+), le point ω sera dans les régions $M_{A_2A_3}$, $M_{A_1A_2A_3}$ ou M_{A_1} suivant la position de α dans la suite

$$-\infty, \quad -b, \quad 2b, \quad +\infty,$$

et que si P est ascendante (diagramme H^-), il sera dans les régions M_{A_1}, M_l ou $M_{A_2A_1}$ suivant la position de α dans la suite

$$-\infty, \quad -\frac{I}{2Mb}, \quad \frac{I}{Mb}, \quad -\infty.$$

Il peut arriver que α coïncide avec une des valeurs de séparation, c'est-à-dire que ω soit sur une ou plusieurs frontières.

P étant descendante, si $\alpha = -b$, le point ω est sur la frontière de $M_{A_1A_2A_3}$ et $M_{A_2A_3}$; donc les trois contacts persistent, mais avec cette particularité que la réaction de percussion en A_1 est nulle; si $\alpha = 2b$, le point ω

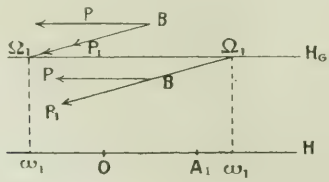
est en A_1, appartenant aux quatre régions $M_{A_1A_2A_3}$, $M_{A_1A_2}$, $M_{A_1A_3}$, M_{A_1} et il y a persistance des trois contacts, mais avec cette particularité que les réactions de percussion en A_2 et A_3 sont nulles.

P étant ascendante, si $\alpha = -\frac{1}{2Mb}$, le point ω est sur la frontière de M_{A_1} et M_l; donc il y a cessation des deux contacts A_2, A_3, et persistance du contact A_1, mais avec cette particularité que la réaction de percussion en A_1 est nulle; si $\alpha = \frac{1}{Mb}$, le point ω est en A_1, appartenant aux quatre régions $M_{A_2A_3}$, M_{A_2}, M_{A_3} et M_l; donc il y a cessation du contact A_1 et persistance des deux autres contacts avec cette particularité que les percussions de réaction en ces deux points sont nulles.

Supposons maintenant la percussion P parallèle au plan H; le point Ω sera à l'infini, et de même ω, et, pour voir ce qui arrive, il suffira de considérer P comme limite d'une percussion, descendante par exemple, et faisant avec H un angle très petit.

Par exemple, supposons P de direction et sens A_1O (*fig.* 3). Prenons sur P un point quelconque B et

Fig. 3.



imaginons une percussion descendante P_1 très voisine de P. Elle donnera un point ω_1 situé extrêmement loin sur A_1O, et qui sera du côté de O si B est au-dessus de H_G, et du côté A_1 si B est au-dessous de H_G. On

aura donc à la limite un point ω situé sur H^+, à l'infini dans la direction et le sens A_1O, donc dans la région M_{A_1} si P est au-dessus de H_G, et un point ω situé sur H^+ à l'infini dans la direction et le sens OA_1, donc dans la région M_{A_1} si P est au-dessous de H_G.

Supposons de même une percussion P de direction et sens A_2A_3 : nous aurons un point ω sur H^+ à l'infini sur A_2, A_3, du côté de A_3 si P est au-dessus de H_G et du côté de A_2 si P est au-dessous. L'examen des diagrammes montre que ces points à l'infini de H^+ sont dans des régions différentes suivant que l'on est dans le cas $\frac{I}{M} < 2b^2$ ou dans le cas $\frac{I}{M} > 2b^2$, de sorte que l'on a les résultats suivants :

P de direction et sens A_2A_3.	P au-dessus de H_G.....	$\frac{I}{M} < 2b^2$	région $M_{A_1A_2}$.
		$\frac{I}{M} > 2b^2$	région M_{A_1} :
	P au-dessous de H_G.....	$\frac{I}{M} < 2b^2$	région $M_{A_1A_2}$.
		$\frac{I}{M} > 2b^2$	région M_{A_1} [1].

---

[1] La question de liaison unilatérale que nous venons de traiter comme application forme la partie la plus importante du problème de Mécanique donné à l'Agrégation en 1913 et dont M. de Sparre vient de publier ici même une solution complète (*N. A.*, juillet 1919).

Les cas que nous avons examinés embrassent tous les cas particuliers qui étaient indiqués à l'énoncé, et tous nos résultats coïncident avec ceux donnés par M. de Sparre. Laissant de côté une erreur de calcul qui, dans le cas examiné par lui à la page 263, le conduit à trois réactions égales, alors qu'il y en a une qui est nulle, nous ferons remarquer que la méthode de M. de Sparre, autant qu'on peut la reconstituer d'après les indications assez vagues qu'il donne et la façon dont il l'applique, fait partie de celles dont il a été parlé au début de notre exposé, et que, pour des cas particuliers autrement et convenablement choisis, elle donnerait des résultats autres que ceux de notre théorie rigoureuse, donc inexacts.

[K¹9dα]

SUR LES POLYGONES HARMONIQUES D'UN NOMBRE PAIR DE COTÉS ET SUR CERTAINS CERCLES DU TRIANGLE;

PAR M. V. THÉBAULT,
Professeur à Ernée (Mayenne).

1. Si l'on transforme par inversion, par rapport à un point quelconque du plan, le module étant quelconque, les sommets d'un polygone régulier, on obtient les sommets d'un polygone inscrit dans un cercle. Ces *polygones harmoniques* jouissent de propriétés très curieuses déjà connues [1]; nous en ajouterons quelques autres.

THÉORÈME. — *Dans un polygone harmonique*

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{2n},$$

[1] Voici une bibliographie peut-être incomplète des polygones harmoniques.

Quadrilatère harmonique (TUCKER, *Société mathématique de Londres*, 1885. — J. NEUBERG, *Mathesis*, 1885).

Note sur l'hexagone harmonique du triangle (J. CASEY, *Académie Royale d'Irlande*, 1886).

Mémoire sur les polygones harmoniques (J. CASEY, *A sequel to the first six books of the elements of Euclid*, 4ᵉ édition. — J. NEUBERG et TARRY, *Association française pour l'avancement des Sciences*, Nancy, 1886. — T.-C. SIMMONS, *Proceedings of the London Mathematical Society*. — J. CASEY, *Mathesis*, 1890, p. 96).

Sur certains quadrilatères inscriptibles (Ch. MICHEL, *Bulletin de Mathématiques élémentaires*, 1908, p. 259).

les diagonales $\alpha_1\alpha_{n+1}$, $\alpha_2\alpha_{n+2}$, ..., $\alpha_{n-1}\alpha_{2n-1}$ *concourent au point de Lemoine du polygone.*

Soit un polygone régulier $A_1A_2\ldots A_{2n}$. Transformons la figure par inversion, le pôle n'étant pas situé sur la circonférence circonscrite au polygone, le module étant quelconque. Le cercle circonscrit se transforme en un cercle Γ et ses diamètres A_1A_{n+1}, A_2A_{n+2}, ..., $A_{n-1}A_{2n-1}$ en des cercles ayant deux à deux même axe radical. D'ailleurs les axes radicaux de ces cercles, associés respectivement avec le cercle Γ, sont concourants. Donc si l'on désigne par α_1, α_2, ..., α_{2n} les sommets du polygone harmonique donné par cette inversion, les diagonales $\alpha_1\alpha_{n+1}$, $\alpha_2\alpha_{n+2}$, ..., $\alpha_{n-1}\alpha_{2n-1}$ concourent en un même point K. Du reste, comme les points A_1, A_2, A_3, A_{n+2} forment un système harmonique, il en est de même de leurs inverses α_1, α_2, α_3, α_{n+2}. Puisque K est situé sur $\alpha_2\alpha_{n+2}$, il est tel que ses distances aux côtés $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_2\alpha_3$ du polygone harmonique sont proportionnelles à ces côtés, c'est-à-dire le point de Lemoine du polygone.

Théorème. — *Dans un polygone harmonique de 2n côtés, le produit des côtés de rang pair égale celui des côtés de rang impair.*

Dans l'inversion précédente, μ étant la puissance et S le pôle, a le côté du polygone régulier,

$$\alpha_1\alpha_2 = \frac{a}{SA_1 . SA_2}\mu, \qquad \alpha_2\alpha_3 = \frac{a}{SA_2 . SA_3}\mu,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_{2n-1}\alpha_{2n} = \frac{a}{SA_{2n-1} . SA_{2n}}, \qquad \alpha_{2n}\alpha_1 = \frac{a}{SA_{2n} . SA_1}\mu;$$

d'où

$$(1) \qquad \frac{\alpha_1\alpha_2 . \alpha_3\alpha_4 \ldots \alpha_{2n-1}\alpha_{2n}}{\alpha_2\alpha_3 . \alpha_4\alpha_5 \ldots \alpha_{2n}\alpha_1} = 1.$$

Théorème. — *Dans un polygone harmonique*

$$A_1 A_2 \ldots A_{2n},$$

les cordes $A_2 A_{2n}$, $A_3 A_{2n-1}$, ... *concourent au pôle de* $A_1 A_{n+1}$ *par rapport au cercle circonscrit.*

La diagonale $A_1 A_{n+1}$ passant au point K de Lemoine du polygone, A_1, A_{n+1} sont conjugués harmoniques par rapport à A_2, A_{2n}. Donc $A_2 A_{2n}$ passe au pôle P de $A_1 A_{n+1}$. Il en est de même pour $A_3 A_{2n-1}$, ...

Les n diagonales du polygone, telles que $A_1 A_{n+1}$, ont donc leurs pôles sur la polaire Δ du point K de Lemoine par rapport au cercle circonscrit O.

Le cercle de centre P et de rayon PA_1 est un cercle d'Apollonius des triangles $A_1 A_2 A_{2n}$, ... Il existe ainsi n cercles, orthogonaux au cercle O et ayant pour centres les pôles des n diagonales $A_1 A_{n+1}$ du polygone harmonique. Ces cercles ont par suite même axe radical. Ils se coupent en deux points M et M′ de la droite OK qui joint le centre du cercle circonscrit au point de Lemoine du polygone. Ces points M et M′, obtenus différemment par J. Casey et appelés par lui *centres d'inversion* du polygone, apparaissent ici comme les *centres isodynamiques* dans le triangle. En les joignant par exemple aux sommets A_1, A_2, ..., A_{2n}, les droites obtenues rencontrent le cercle circonscrit en $2n$ points, sommets d'un polygone régulier de $2n$ côtés.

Leur construction est simple, puisqu'il suffit de tracer une seule circonférence P qui détermine M et M′ sur OK.

Théorème. — *Quand un polygone* $A_1 A_2 \ldots A_{2n}$, *inscrit à une conique, est tel que les cordes* $A_2 A_{2n}$, ..., $A_n A_{n+2}$ *concourent au pôle de* $A_1 A_{n+1}$, *par rapport à la conique, que les cordes* $A_1 A_3$, ..., $A_{n+1} A_{n+3}$

concourent au pôle de $A_2 A_{n+2}, \ldots$, *le rapport des produits des côtés de rang pair et des côtés de rang impair égale le rapport des produits des diamètres (réels ou imaginaires) qui leur sont parallèles.*

Quand un triangle ABC est inscrit à une conique, la tangente en B à la courbe rencontre AC en un point P tel que

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{d_1^2}{d_2^2} \cdot \frac{PA}{PC},$$

d_1, d_2 désignant les longueurs des diamètres (réels ou imaginaires) parallèles à AB et BC.

Considérant le quadrilatère $A_1 A_2 A_{n+1} A_{2n}$, inscrit à la conique, et désignant par d_1, δ_1, δ_2, d_{2n} les diamètres parallèles respectivement à $A_1 A_2$, $A_2 A_{n+1}$, $A_{n+1} A_{2n}$ et $A_{2n} A_1$, on obtient

$$\frac{A_2 A_{n+1} \times A_{2n} A_1}{A_1 A_2 \times A_{n+1} A_{2n}} = \frac{d_{2n} . \delta_2}{d_1 . \delta_1}.$$

Des égalités analogues correspondent aux quadrilatères déterminés d'abord par $A_1 A_{n+1}$ et les cordes qui concourent à son pôle, puis par $A_2 A_{n+2}$, ... et les cordes qui passent par leurs pôles respectifs.

Multipliant membre à membre ces égalités, les côtés tels que $A_2 A_{n+1}$, $A_{n+1} A_{2n}$, et les diamètres tels que δ_1, δ_2 s'éliminent d'eux-mêmes, et

$$\frac{A_2 A_3 . A_4 A_5 \ldots\ldots A_{2n} A_1}{A_1 A_2 . A_3 A_4 \ldots\ldots A_{2n-1} A_{2n}} = \frac{d_2 . d_4 \ldots\ldots d_{2n}}{d_1 . d_3 \ldots\ldots d_{2n-1}}.$$

Si la conique est un cercle,

$$d_1 = d_2 = d_3 = \ldots = d_{2n};$$

on retrouve alors la formule particulière (1).

2. Reprenons un polygone régulier $A_1 A_2 \ldots A_{2n}$. On peut tracer une infinité de circonférences tangentes deux à deux et à la circonférence O circonscrite au polygone aux sommets $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$. Il existe deux séries de ces circonférences, suivant qu'elles sont intérieures ou extérieures à la circonférence O.

Transformons la figure par inversion, le pôle n'étant pas situé sur la circonférence O. Aux $2n$ circonférences du polygone régulier correspondent $2n$ circonférences tangentes deux à deux et touchant le cercle circonscrit au polygone harmonique, aux sommets de ce polygone.

Un polygone harmonique d'un nombre pair de côtés étant donné, on peut donc tracer $2n$ circonférences tangentes deux à deux et touchant le cercle circonscrit aux sommets. Commençant par une circonférence quelconque, la couronne des circonférences se ferme d'elle-même.

En particulier, *le quadrilatère harmonique est le seul quadrilatère inscriptible aux sommets duquel on puisse tracer des circonférences se touchant deux à deux et tangentes à la circonférence circonscrite.*

Remarque. — Dans un polygone quelconque

$$A_1 A_2 \ldots A_{2n+1}$$

d'un nombre impair de côtés, inscrit dans un cercle O, il est toujours possible de construire deux couronnes de cercles tangents deux à deux et au cercle circonscrit aux sommets du polygone [1]. Les centres ω_1, $\omega_2, \ldots, \omega_{2n+1}$ des cercles, situés sur OA_1, $OA_2, \ldots$, OA_{2n+1}, déterminent un polygone $\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_{2n+1}$ dont les côtés touchent les circonférences orthogonales au

---

[1] Ed. Lucas, *Mathesis*, 1889, p. 189.

cercle O ayant pour centres les pôles respectifs de A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{2n}A_{2n+1}$.

Le centre ω_1, par exemple, et par suite tous les autres, est obtenu en construisant les points doubles de deux divisions homographiques portées par OA_1.

3. Cette remarque suggère l'étude des cercles tangents deux à deux et au cercle circonscrit O à un triangle à ses sommets A, B, C.

Voici succinctement quelques propriétés de cette figure :

1° Les rayons des trois cercles ω_a, ω_b, ω_c, intérieurs au cercle O de rayon R, sont :

$$\rho_a = \frac{Rbc}{bc + 2aR}, \qquad \rho_b = \frac{Rac}{ac + 2bR}, \qquad \rho_c = \frac{Rab}{ab + 2cR}.$$

Les cercles ω'_a, ω'_b, ω'_c tangents extérieurement au cercle O ont pour rayons

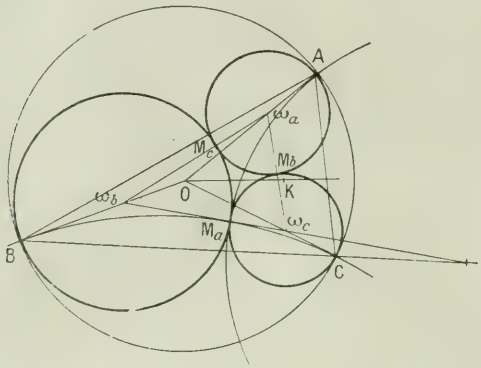
$$\rho'_a = \frac{Rbc}{bc - 2bR}, \qquad \rho'_b = \frac{Rac}{ac - 2bR}, \qquad \rho'_c = \frac{Rab}{ab - 2cR}.$$

2° Les contacts M_a, M_b, M_c, des cercles ω_a, ω_b, ω_c deux à deux, sont les intersections des cercles d'Apollonius et des cercles ayant pour centres les pôles de A, B, C et orthogonaux au cercle O.

3° Les cercles d'Apollonius touchent donc ω_a, ω_b, ω_c en M_a, M_b, M_c. Le centre radical des cercles ω_a, ω_b, ω_c, pris deux à deux, c'est-à-dire le centre du cercle inscrit au triangle $\omega_a\omega_b\omega_c$, a même puissance par rapport aux cercles d'Apollonius ; il est donc sur leur axe radical OK, K étant le point de Lemoine du triangle ABC.

4° Il existe un cercle Ω, autre que O, qui touche les cercles ω_a, ω_b, ω_c. Son centre, situé sur la perpendicu-

laire menée du centre radical des cercles ω_a, ω_b, ω_c, sur leur axe de similitude direct, est par conséquent un point de OK.



5° Le cercle Ω touche ω_a, ω_b, ω_c, à leurs intersections avec les cercles d'Apollonius correspondants, parce que ces cercles coupent orthogonalement ω_a, ω_b, ω_c.

[O'2b]

SUR LES TANGENTES AUX TRAJECTOIRES DES SOMMETS D'UN TRIANGLE QUI SE DÉFORME DANS UN PLAN;

Par M. R. GOORMAGHTIGH.

Soient ABC, A'B'C' deux triangles quelconques et a, b, c les points d'intersection de leurs côtés correspondants; désignons par α, β, γ et α', β', γ' les angles

$$(AA', A'B'),\quad (BB', B'C'),\quad (CC', C'A'),$$
$$(AA', A'C'),\quad (BB', B'A'),\quad (CC', C'B').$$

En appliquant la règle de sinus aux triangles $AA'b$, $AA'c$, ... et en multipliant les relations obtenues, on trouve [1]

$$(1) \qquad \frac{\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{\sin\alpha' \sin\beta' \sin\gamma'} \times \frac{\overline{Ab}.\overline{Bc}.\overline{Ca}}{\overline{Ac}.\overline{Ba}.\overline{Cb}} = 1.$$

En supposant le rapport des produits de segments du premier membre égal à -1, on voit que le rapport des produits de sinus est aussi égal à -1 : lorsque les points a, b, c sont collinéaires, les droites AA', BB', CC' sont donc concourantes; c'est le théorème classique concernant les triangles homologiques.

En considérant, d'autre part, le cas où le rapport des produits de segments qui figure au premier membre de la relation (1) est égal à l'unité, on trouve le théorème suivant :

Si les points d'intersection des côtés correspondants de deux triangles forment un triangle homologique avec l'un d'eux, les côtés de l'autre rencontrent, en trois points collinéaires, les droites qui joignent les sommets correspondants de ces deux triangles.

Il suffit maintenant d'appliquer cette proposition à deux positions infiniment voisines d'un triangle qui se déforme dans le plan pour obtenir ce théorème :

Si un triangle se déforme en restant homologique avec le triangle formé par les points de contact de ses côtés avec leurs enveloppes, les tan-

---

[1] On tient compte des signes des angles et des segments.

gentes aux sommets du triangle aux trajectoires de ces sommets coupent les côtés correspondants en trois points collinéaires.

En particulier, cette propriété est applicable lorsque le triangle donné reste circonscrit à une conique fixe; de même, si un triangle reste inscrit à une conique, il est constamment homologique avec le triangle formé par les points de contact de ses côtés avec leurs enveloppes.

On peut également énoncer le théorème général sous la forme suivante :

Si une conique variable reste tangente à trois courbes données, le triangle des points de contact reste homologique avec le triangle formé par les points de contact de ses côtés avec leurs enveloppes.

En particulier :

Lorsqu'un point décrit une courbe plane quelconque, son triangle pédal, par rapport à un triangle fixe, reste homologique avec le triangle formé par les points de contact des côtés de ce triangle pédal avec leurs enveloppes.

De même :

Lorsqu'un point décrit une courbe plane quelconque, le triangle formé par les pieds des normales abaissées de ce point sur une hypocycloïde à trois rebroussements donnée reste homologique avec le triangle des points de contact de ses côtés avec leurs enveloppes.

CHRONIQUE.

Congrès des Mathématiciens.

Un Congrès international des Mathématiciens s'ouvrira à Strasbourg, le 22 septembre prochain. Le Comité national français des Mathématiques a l'honneur d'inviter à participer aux travaux de ce Congrès les Mathématiciens des Nations de l'Entente et ceux des Nations neutres dont la liste a été arrêtée par la Troisième Conférence interalliée des Académies, tenue à Bruxelles en juillet 1919.

Le Congrès comportera quatre sections :

I. Arithmétique. — Algèbre. — Analyse.

II. Géométrie.

III. Mécanique. — Physique mathématique. — Mathématiques appliquées.

IV. Questions philosophiques, historiques, pédagogiques.

Des comptes rendus comportant au moins un résumé des travaux du Congrès seront envoyés à chaque souscripteur. Un programme de l'organisation du Congrès sera publié ultérieurement.

Droit d'inscription : 60 fr. payables au Trésorier du Congrès, M. Valiron, 52, allée de la Robertsau, Strasbourg.

Le Bureau du Comité national français des Mathématiques est ainsi formé : président d'honneur, M. Jordan ; président, M. Picard ; vice-présidents, MM. Appell, Borel, Lecornu, Le Roux ; secrétaire général, M. Kœnigs ; secrétaire, M. Galbrun ; trésorier, M. Maluski.

Cours de la Sorbonne (2e semestre).

Mécanique analytique et mécanique céleste. — M. Appell traite les mardis et jeudis à $5^h 30^m$ de l'hydrodynamique et de la théorie des tourbillons.

Analyse supérieure. — M. E. Picard traite les mercredis et samedis à $10^h 30^m$ de la théorie des intégrales multiples avec diverses applications à la théorie des fonctions et à la physique mathématique.

Analyse appliquée a la Géométrie. — M. Lebesgue traite les lundis et jeudis à $10^h 30^m$ des polygones de Poncelet et des applications géométriques du théorème d'addition des fonctions elliptiques.

Astronomie. — M. Andoyer traite les mercredis et samedis à $8^h 45^m$ du développement de la fonction perturbatrice et de la théorie des grosses planètes.

Physique mathématique et calcul des probabilités. — M. Borel traite le lundi à 5^h des formes quadratiques de différentielles et des principes de la Géométrie, de la Mécanique et de la Physique.

Mathématiques. — M. Vessiot fera, à partir du 12 avril, les lundis et vendredis, à $2^h 30^m$, un cours sur la théorie des groupes continus de transformations et sur ses applications.

Cours du Collège de France.

M. G. Julia, chargé d'un cours de la fondation Peccot, traite le mardi à 3^h et le samedi à 2^h du théorème de M. Picard sur les fonctions entières ou méromorphes, et de recherches connexes.

Nouvelles de l'Étranger.

Angleterre. — L'Université d'Edimbourg a créé un enseignement d'actuariat, couvrant deux années et

sanctionné par un diplôme. La partie mathématique est dirigée par le Professeur E.-T. Whitaker et la partie actuarielle par le Dr A.-E. Sprague.

États Unis. — Le Professeur Vito Volterra a donné en octobre et novembre 1919, dans les Universités de Californie, d'Illinois et de Chicago, diverses séries de conférences.

Sujets traités : The propagation of electricity in a magnetic field. — Derivative functional equations. — Functions of composition. — Integro-differential equations. — The international organisation of science during and after the war.

La vie et l'œuvre de Maxime Bôcher, professeur de Mathématiques à l'Université d'Harvard, ont fait l'objet de deux articles, l'un du Dr Birkhoff, l'autre de W. F. Osgood, publiés dans le *Bulletin de la Société mathématique américaine*, nos 5 et 8 de 1919.

M. J. Hadamard, professeur au Collège de France, fera ce printemps une série de conférences à l'Université de Yale.

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Montpellier.

Épreuve théorique. — *Une courbe* C *est représentée par les équations*

$$x = a\lambda \cos t, \qquad y = b\lambda \sin t, \qquad z = \frac{\lambda^2}{2}(a\cos^2 t + b\sin^2 t),$$

où t est un paramètre variable.

1° *Former l'équation de la surface* S *engendrée par la perpendiculaire abaissée de chaque point de la courbe sur l'axe* OZ.

2° *Si* λ *varie, la courbe* C *engendre un paraboloïde. Calculer l'aire de ce paraboloïde, limité à la courbe* C *correspondant à une valeur donnée de* λ.

3° *Calculer le volume limité par le paraboloïde et la surface* S.

4° *Calculer la valeur de l'intégrale triple*

$$\int\int\int [x^2 + y^2 - z(a+b)]\, dx\, dy\, dz$$

à l'intérieur de ce volume.

Solution. — 1° L'équation de la surface S s'obtient en éliminant t entre les équations de la perpendiculaire à Oz :

$$z = \frac{\lambda^2}{2}(a\cos^2 t - b\sin^2 t), \qquad \frac{ay}{bx} = \frac{\sin t}{\cos t},$$

$$z = \frac{\lambda^2}{2}\, ab\, \frac{bx^2 + ay^2}{b^2x^2 + a^2y^2}.$$

2° L'équation du paraboloïde s'obtient en éliminant λ et t :

$$2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}.$$

L'aire de ce paraboloïde sera donné par la formule

$$A = \int\int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$$

$$= \int\int \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy.$$

Si l'on remplace x et y en fonction de λ et t, variables indé-

pendantes, l'élément $dx\,dy$ sera remplacé par

$$\begin{vmatrix} a\cos t & -\lambda a\sin t \\ b\sin t & \lambda b\cos t \end{vmatrix} d\lambda\,dt = \lambda ab\,d\lambda\,dt,$$

$$A = \int\int \sqrt{1+\lambda^2}\,\lambda ab\,d\lambda\,dt,$$

où t varie de o à 2π, λ de o à une valeur donnée $\lambda = \mu$:

$$A = 2\pi ab \int_0^\mu \sqrt{1+\lambda^2}\,\lambda\,d\lambda = \frac{2}{3}\pi ab\left[(1+\mu^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right].$$

3° La surface S et le paraboloïde se coupent suivant la courbe C, dont la projection sur le plan xOy est l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \mu^2.$$

Le volume compris entre ces deux surfaces sera

$$V = \int\int \left[\frac{\mu^2}{2}\,ab\,\frac{bx^2+ay^2}{b^2x^2+a^2y^2} - \frac{x^2}{2a} - \frac{y^2}{2b}\right] dx\,dy.$$

où

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < \mu^2:$$

$$V = \int_0^\mu \int_0^{2\pi} \left[\frac{\mu^2}{2}\,a^2b^2\,\frac{a\cos^2 t + b\sin^2 t}{a^2b^2} - \frac{a}{2}\lambda^2\cos^2 t - \frac{b}{2}\lambda^2\sin^2 t\right] ab\lambda\,d\lambda\,dt.$$

Mais

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t\,dt = \pi,$$

$$V = \frac{\pi}{2}\int_0^\mu (a+b)(\mu^2-\lambda^2)ab\lambda\,d\lambda = \pi ab\,\frac{a+b}{8}\,\mu^4.$$

4° $I = \int\int\int [x^2+y^2-z(a+b)]\,dx\,dy\,dz$

$$= \int\int \left[(x^2+y^2)z - \frac{z^2}{2}(a+b)\right]_{z_1}^{z_2} dx\,dy$$

$$= \int\int (z_2-z_1)\left[x^2+y^2-(a+b)\,\frac{z_2+z_1}{2}\right] dx\,dy.$$

où

$$z_2 = \frac{\mu^2}{2}(a\cos^2 t - b\sin^2 t), \qquad z_1 = \frac{\lambda^2}{2}(a\cos^2 t + b\sin^2 t):$$

$$\begin{aligned}
I = \int_0^{\mu}\int_0^{2\pi} & \frac{\mu^2-\lambda^2}{2}(a\cos^2 t + b\sin^2 t) \\
& \times\Big[\lambda^2(a^2\cos^2 t - b^2\sin^2 t) \\
& \qquad - \frac{a+b}{4}(\mu^2+\lambda^2)(a\cos^2 t + b\sin^2 t)\Big]\, ab\lambda\, d\lambda\, dt;
\end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^4 t\, dt = \int_0^{2\pi}\frac{1}{8}(\cos 4t + 4\cos 2t + 3)\, dt = \frac{3}{4}\pi,$$

$$\int_0^{2\pi}\sin^4 t\, dt = \frac{3}{4}\pi, \qquad \int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t = \frac{\pi}{4};$$

$$\begin{aligned}
I = \frac{\pi}{8}\int_0^{\mu} & (\mu^2-\lambda^2) \\
& \times\Big[\lambda^2(3a^3 - a^2 b + ab^2 + 3b^3) \\
& \qquad - \frac{a-b}{4}(\mu^2+\lambda^2)(3a^2 + 2ab + 3b^2)\Big]\, ab\, d\lambda \\
= \frac{\pi}{8}(a+b)ab & \Big[\frac{3}{4}(a^2-b^2)\Big(-\frac{3}{5}\lambda^5 + \frac{4}{3}\lambda^3\mu - \lambda\mu^4\Big) \\
& + \frac{ab}{2}\Big(\lambda^5 - \frac{4}{3}\lambda^3\mu^2 - \lambda\mu^4\Big)\Big]_{\lambda=0}^{\mu} \\
= -\frac{\pi}{8}(a-b)ab & \Big(\frac{a^2+b^2}{5} + \frac{2}{3}ab\Big)\mu^5.
\end{aligned}$$

Épreuve pratique. — *Intégrer l'équation différentielle*

$$(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} - 6x^2 - 2 = 0,$$

sachant qu'elle a une solution de la forme $y = x^{\alpha}$.

Trouver une solution particulière qui s'annule pour $x = 0$, *sa dérivée prenant la valeur* $y' = 1$.

Solution. — La substitution donne la seule hypothèse possible $y = x^2$. Si l'on pose

$$y = x^2 + z \quad \text{et} \quad \frac{dz}{dx} = u,$$

on a

$$\frac{du}{dx} + \frac{2x}{1+x^2}u = 0, \qquad \mathrm{L}u + \mathrm{L}(1+x^2) = \mathrm{L}c,$$

$$u = \frac{c}{1+x^2}, \qquad z = c \operatorname{arc\,tang} x + c',$$

$$y = c \operatorname{arc\,tang} x + c' + x^2$$

et la solution particulière

$$y = x^2 + \operatorname{arc\,tang} x,$$

où $\operatorname{arc\,tang} x = 0$. (Avril 1919.)

Épreuve théorique. — *Intégrer l'équation aux dérivées partielles*

$$2xz\frac{\partial z}{\partial x} - 2yz\frac{\partial z}{\partial y} + x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

Déterminer une surface intégrale passant par la courbe

$$y = xe^x, \qquad z^2 = x^2 - y^2.$$

Déterminer les lignes de courbure de cette surface, et montrer qu'elles sont situées sur des sphères passant par l'origine.

Solution. — Le système d'équations différentielles des caractéristiques donne

$$\frac{dx}{2xz} = \frac{dy}{2yz} = \frac{dz}{z^2 - x^2 - y^2} = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{z(x^2 + y^2 - z^2)},$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 - z^2},$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = cx, \qquad y = c'x.$$

L'intégrale générale sera

$$x^2 + y^2 + z^2 = xf\left(\frac{y}{x}\right).$$

Une courbe caractéristique rencontrera la courbe donnée, si l'on a

$$2x^2 = cx, \qquad e^x = c', \qquad c = 2\mathrm{L}c';$$

la surface cherchée, lieu de ces caractéristiques, aura pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2x \mathrm{L} \frac{y}{x}.$$

Pour la surface intégrale

$$x^2 + y^2 + z^2 = xf\left(\frac{y}{x}\right),$$

on a

$$2(x + pz) = f\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right), \qquad 2(y + qz) = f'\left(\frac{y}{x}\right),$$

où $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. Les lignes de courbure sont données par l'équation différentielle

$$\frac{d(x + pz)}{dp} = \frac{d(y + qz)}{dq},$$

$$\frac{-\frac{y}{x} f''\left(\frac{y}{x}\right) d\frac{y}{x}}{dp} = \frac{f''\left(\frac{y}{x}\right) d\frac{y}{x}}{dq},$$

qui se décompose :

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = 0, \qquad x\,dp + y\,dq = 0.$$

Le premier système de lignes de courbure est donné par

$$y = cx, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = xf(c),$$

où c est arbitraire.

Pour le second système,

$$dz = p\,dx + q\,dy = d(px + qy), \qquad z = px + qy + c',$$

$$-2y^2 + 2z(px + qy) = xf\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$2x^2 - 2y^2 + 2z^2 - 2c'z = x^2 + y^2 + z^2 = xf\left(\frac{y}{x}\right),$$

ou

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2c'z, \qquad 2c'z + xf\left(\frac{y}{x}\right).$$

Pour la surface particulière considérée, on a les deux sys-

tèmes de lignes de courbure

$$y = cx, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 2x\,\mathrm{L}c,$$

$$c'z = x\,\mathrm{L}\frac{y}{x}, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 2c'z.$$

Épreuve pratique. — *On considère la fonction*

$$f(z) = \frac{z-3}{z(z^2-1)^2(z-2)^2}.$$

1° *Calculer l'intégrale* $\mathrm{I} = \int f(z)\,dz$ *le long d'un cercle ayant son centre à l'origine, son rayon étant successivement égal à* $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$, *dans le sens trigonométrique.*

2° *Existe-t-il un cercle de centre* $z_0 = \frac{i}{2}$ *dans lequel la fonction*

$$\varphi(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$$

soit une fonction uniforme de sa limite supérieure z.

Solution. — 1° En posant successivement $z = 1 + u$, $-1 + u$ et $2 + u$, et en formant les deux premiers termes du développement, suivant les puissances de u, du produit $u^2 f$, on trouve

$$f(z) = -\frac{3}{4z} - \frac{1}{2(z-1)^2} + \frac{1}{4(z-1)} + \frac{1}{9(z+1)^2}$$
$$+ \frac{29}{108(z+1)} - \frac{1}{18(z-2)^2} + \frac{25}{108(z-2)}.$$

Les pôles $z = 0, 1, -1, 2$ ont les résidus $-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{29}{108}, \frac{25}{108}$.

L'intégrale, autour de chaque pôle, est égale au produit du résidu par $2\pi i$. L'intégrale sur chaque cercle est la somme des intégrales autour des pôles intérieurs. Pour les trois cercles donnés, on a

$$\mathrm{I}_1 = -\frac{3}{2}\pi i, \qquad \mathrm{I}_2 = 2\pi i\left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{29}{108}\right) = -\frac{25}{54}\pi i,$$
$$\mathrm{I}_3 = 0.$$

2° Un cercle de rayon $\frac{1}{2}$ et de centre $\frac{i}{2}$, passe par o et ne comprend aucun pôle à l'intérieur; $\varphi(z)$ est uniforme dans ce cercle. (Juin 1919.)

Paris.

Épreuve théorique. — I. *Soient* Ox, Oy, Oz *trois axes de coordonnées rectangulaires et* D *une droite du plan des* xy *parallèle à* Ox, *représentée par les équations*

$$D(z = 0, y = h).$$

D'un point quelconque M *de l'espace, on abaisse la perpendiculaire* MP *sur* D, *et la perpendiculaire* MQ *sur* Oz. *On demande l'équation générale des surfaces* S, *telles que le plan tangent en un point quelconque* M *de l'une d'elles soit parallèle à la droite* PQ *correspondante.*

Démontrer qu'il existe une infinité de surfaces de cette espèce dépendant de deux constantes arbitraires, qui sont des surfaces développables.

Trouver la relation qui lie les coefficients angulaires du plan tangent à l'une de ces surfaces.

Peut-on choisir les constantes dont dépendent ces surfaces développables de façon que l'arête de rebroussement soit une hélice?

II. *Déterminer une fonction analytique*

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y),$$

de la variable complexe $z = x + iy$, *sachant que* $P(x, y)$ *est une fonction de* $u = \sqrt{x^2 + y^2} + x$, *et* $Q(x, y)$ *une fonction de* $v = \sqrt{x^2 + y^2} - x$.

Solution. — I. Si l'*on permute les noms des axes* Oy *et* Oz *de l'énoncé*, l'équation aux dérivées partielles des surfaces S s'écrit

$$(1) \qquad px - qy = h.$$

Toute surface développable est d'ailleurs solution de l'équa-

tion

$$q = f(p).$$

Exprimons que ces équations sont compatibles en annulant le crochet de Jacobi qui leur correspond :

$$q + pf'(p) = 0.$$

La fonction f est définie par

$$f + pf' = 0 \qquad \text{ou} \qquad pf = \text{const.} = a.$$

Les coefficients du plan tangent sont donc liés par la relation

$$(2) \qquad pq = a.$$

Résolvons en p et q les équations (1) et (2) et formons l'expression de dz,

$$dz = \frac{h \pm \sqrt{h^2 + 4axy}}{2x}\,dx - \frac{h \mp \sqrt{h^2 + 4axy}}{2y}\,dy.$$

Par intégration, nous obtenons une famille de surfaces développables dépendant de deux constantes arbitraires et répondant à la question

$$2z = h \log\frac{x}{y} \pm \int \frac{\sqrt{h^2 + 4axy}\,d(xy)}{xy} + b.$$

Si l'arête de rebroussement est une hélice, le plan tangent à la surface S, osculateur à cette hélice, de coefficients p, $\frac{a}{p}$, -1, fait un angle constant avec une direction fixe (A, B, C) : d'où la condition

$$\frac{(Ap^2 + Ba - Cp)^2}{p^2 + p^4 + a^2} = \text{const.}$$

qui donne $2a = \pm 1$, la direction étant $(1, \pm 1, 0)$. Les valeurs obtenues de p et q doivent donc rendre constante l'expression $\frac{p \pm q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$ ou, puisque $pq = a$, l'expression $p^2 + q^2$: pour $x = y$, celle-ci se réduit à $\frac{4h^2}{x^2} + 1$; d'où $h = 0$. On a alors une famille de cônes, $4(2z - b)^2 = xy$.

II. Soit $P = f(u)$, $Q = g(v)$; les conditions d'analyticité donnent

$$u f'(u) = v g'(v), \qquad v f'(u) = v g'(v);$$

on en déduit

$$u f'^2(u) = v g'^2(v) = \text{const.}$$

A une constante additive et à un facteur constant près, P et Q sont égaux à $\sqrt{u}$ et $\sqrt{v}$, ou, en posant $x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$, à $\sqrt{\rho}\cos\frac{\varphi}{2}$ et $\sqrt{\rho}\sin\frac{\varphi}{2}$. Par suite, $f(z) = A\sqrt{z} + B$, A et B étant des constantes arbitraires.

Épreuve pratique. — 1° *En intégrant la fonction* $\frac{1}{\sqrt{1+z^4}}$, *suivant un contour convenable, démontrer la relation*

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = \sqrt{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

2° *Utiliser la relation précédente pour calculer l'intégrale du premier membre à une unité près, par défaut.*

Solution. — 1° La fonction $f(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^4}}$ présente quatre branchements A, B, C, D$\left(\frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}\right)$. Prenons un contour formé par l'axe Ox, un quart de cercle de très grand rayon et l'axe yO; l'intégrale le long du cercle tend vers zéro; les autres tendent vers

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} - \int_\infty^0 \frac{i\,dy}{\sqrt{1+y^4}} \qquad \text{ou} \qquad (1+i)\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$$

Prenons d'autre part le lacet allant de l'origine au point critique A$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$; l'intégrale suivant le petit cercle entourant le point A tend vers zéro; et l'on obtient, en posant

$$z = \rho\,\frac{1+i}{\sqrt{2}},$$

$$2\,\frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^4}}.$$

Comme il n'y a pas de points critiques entre les deux contours, les valeurs de l'intégrale sont égales et la formule proposée est établie.

2° En posant $x = \sin\varphi$, on obtient

$$I = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}\, d\varphi.$$

Comme on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p}\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{2}\,\frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots 2p},$$

il vient

$$I = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left[1 - \frac{1}{4} + \frac{9}{64} - \ldots\right],$$

quantité comprise entre 1,65 et 1,97; sa valeur à une unité près par défaut est l'unité. (Juin 1919.)

Épreuve théorique. — I. *Démontrer que toute équation différentielle de la forme*

$$(y - x)y'' + F(y') = 0, \qquad y' = \frac{dy}{dx}, \qquad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

admet une intégrale première de la forme

$$(y - x)f(y') = C,$$

C *désignant une constante arbitraire, $f(y')$ une fonction de y' seul. En déduire l'intégrale générale de l'équation différentielle*

$$(y - x)y'' - (1 + y')(1 + y'^2) = 0.$$

II. *Calculer l'intégrale double*

$$\int\int xy\,\frac{\partial^4 f(x, y)}{\partial x^2\,\partial y^2}\,dx\,dy,$$

étendue au rectangle R *limité par les droites*

$$x = 0, \qquad x = a > 0, \qquad y = 0, \qquad y = b > 0.$$

La fonction $f(x, y)$ est supposée continue, ainsi que toutes

les dérivées qui figurent dans le calcul, à l'intérieur et sur les côtés du rectangle R.

Solution. — I. Prenons pour variable $u = y - x$ et pour fonction u' :

$$u\frac{u'\,du'}{du} + F(1 + u') = 0, \qquad ue^{\int \frac{u'\,du'}{F(1+u')}} = \text{const.}$$

Cette intégrale première a la forme voulue

$$(y - x)e^{\int \frac{(y'-1)\,dy'}{F(y')}} = \text{const.}$$

Dans l'exemple, on a

$$\frac{y' - 1}{(y' + 1)(y'^2 + 1)} = -\frac{1}{y' + 1} + \frac{y'}{y'^2 + 1}.$$

Par suite, il vient

$$(y - x)\frac{\sqrt{1 + y'^2}}{1 + y'} = \text{const.}$$

II. On reconnaît de suite que l'intégrale considérée s'écrit sous la forme connue

$$\int\int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy,$$

en posant

$$\varphi(x, y) = xy\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} - x\frac{\partial F}{\partial x} - y\frac{\partial F}{\partial y} + F,$$

le champ restant le même. D'après un résultat classique, la valeur de l'intégrale est

$$\varphi(a, b) - \varphi(a, 0) - \varphi(0, b) + \varphi(0, 0).$$

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale double*

$$\int\int \frac{dx\,dy}{(1 + x^2 + y^2)^2},$$

étendue :

1° *A l'intérieur de la parabole*

$$y^2 = 2x;$$

2° *A l'extérieur de la même parabole.*

Solution. — En passant aux coordonnées polaires, on obtient

$$-\frac{1}{2}\int\int d\left(\frac{1}{1+\rho^2}\right)d\varphi,$$

la frontière étant $\rho_1 = \frac{2\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$.

1° Il vient

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{1+\rho_1^2}\right)d\varphi = 2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(2-t^2)^2},$$

où $t = \operatorname{tang}\varphi$. On calcule $\int\frac{dz}{(1+z^2)^2}$ le long d'un contour formé de l'axe des x et d'un demi-cercle de centre origine, situé au-dessus de Ox, contenant à son intérieur le pôle unique

$$z = i\sqrt{2}$$

de résidu $-\frac{i\sqrt{2}}{16}$. Il vient

$$I = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

2° Pour le plan entier, on obtient π. Donc pour l'espace extérieur à la parabole, on a

$$J = \pi\left(1-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right).$$

(Octobre 1919.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1825.

(1899, p. 349; 1917, p. 358.)

Les côtés BC, CA, AB *du triangle* ABC *sont coupés en* A′, B′, C′ *par les bissectrices extérieures des angles opposés et en* A″, B″, C″ *par la droite r sur laquelle se trouvent les*

centres du cercle inscrit et du cercle circonscrit. Démontrer que les trois cercles AA′A″, BB′B″, CC′C″ *se coupent sur la droite* r. G. Gallucci.

Solution

Par M. R. Bouvaist.

Le cercle AA′A″ coupe r en un point K tel que (O et I étant les centres des cercles circonscrit et inscrit)

$$\widehat{AKI} = \widehat{AA''B} = \frac{\widehat{C-B}}{2} = \widehat{OAI},$$

d'où la relation

$$\overline{OI}.\overline{OK} = \overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 = \overline{OC}^2;$$

le point K est donc aussi sur les cercles BB′B″ et CC′C″.

2314.

1917, p. 199.

Deux points A *et* B *marqués sur une droite décrivent deux droites rectangulaires* $y'y$ *et* $x'x$; *un point* M *marqué sur la droite décrit une ellipse. Si l'on désigne par* x_1 *et* y_1 *les coordonnées du point où la droite* AB *est tangente à son enveloppe, par* x_2 *et* y_2 *les coordonnées du centre de courbure en* M, *on a, en posant* $\overline{MA} = a$, $\overline{MB} = b$:

$$\frac{y_2}{x_2} : \frac{y_1}{x_1} = \frac{a}{b}, \qquad \frac{x_2}{x_1} = \frac{a-b}{a}, \qquad \frac{y_2}{y_1} = \frac{a+b}{b}.$$

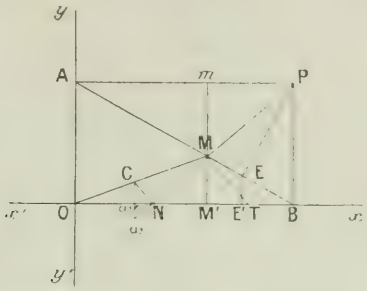
G. Fontené.

Solution

Par M. J. Lemaire.

Soient P le point projeté en A et B sur $y'y$ et $x'x$, E sa projection sur AB, M′ et E′ les projections de M et E sur $x'x$, m le point où MM′ coupe AP. La droite AB touche son enveloppe en E, la normale en M à l'ellipse décrite par ce point est PM qui rencontre $x'x$ en N; menons la tangente en M qui coupe $x'x$ en T. Si par le centre de courbure ω en M nous traçons la parallèle à $y'y$ qui rencontre OM en C, on sait que

NC est perpendiculaire à la normale (construction de Mannheim); appelons ω' le point commun à ωC et $x'x$.



A et B étant supposés fixes, si M se déplace, M' et T sont en correspondance homographique, et comme OM' et OT sont nuls et infinis en même temps, le rapport $\frac{OM'}{OT}$ reste constant; de même le rapport égal $\frac{O\omega'}{ON}$; en plaçant M en E, on obtient

$$(1) \qquad \frac{O\omega'}{ON} = \frac{OE'}{OB},$$

d'où

$$\frac{O\omega'}{OE'} = \frac{ON}{OB}\,\frac{\overline{OB} + \overline{BN}}{\overline{OB}} = 1 + \frac{\overline{BN}}{\overline{AP}} = 1 + \frac{\overline{BM}}{\overline{AM}} = 1 + \frac{b}{a},$$

c'est la deuxième relation demandée; nous avons supposé MA > MB. La figure donne encore

$$\frac{\omega\omega'}{EE'} = \frac{\omega\omega'}{MM'} : \frac{EE'}{MM'} = \frac{N\omega'}{MM'}\,\frac{BE'}{BM'} = \frac{N\omega'}{BE'} \times \frac{BM'}{NM'};$$

mais de (1), on déduit

$$\frac{ON - O\omega'}{ON} = \frac{OB - OE'}{OB}$$

ou

$$\frac{N\omega'}{ON} = \frac{BE'}{OB},$$

et par suite

$$\frac{N\omega'}{BE'} = \frac{ON}{OB} = \frac{a+b}{a};$$

on en conclut

$$\frac{\omega\omega'}{EE'} = \frac{a+b}{a} \times \frac{Am}{Pm} = \frac{a+b}{a} \times \frac{AM}{BM}$$

et en tenant compte des signes

$$\frac{\overline{\omega\omega'}}{\overline{EE'}} = \frac{a+b}{b};$$

c'est la troisième relation de l'énoncé. La première est enfin une conséquence des deux autres. Ces relations montrent que la développée d'une ellipse est une transformée homographique d'une hypocycloïde à quatre rebroussements.

Autre solution, par *Un abonné*.

QUESTIONS.

2436. Deux points décrivent avec des vitesses uniformes deux cercles concentriques. Démontrer que la droite qui les joint reste normale à une épicycloïde ou à une hypocycloïde, en général allongée ou raccourcie.

Dans le cas où les deux points ont des vitesses angulaires opposées, on obtient une propriété connue de l'ellipse.

L. Maloue.

2437. On considère deux coniques homofocales (C′) et (C″) et les points M′ sur (C′) et M″ sur (C″), tels que les tangentes en M′ et M″ aux coniques (C′) et (C″) soient parallèles. Démontrer que l'enveloppe de la droite M′M″ est une conique (C).

Supposant (C′) fixe et (C″) une conique variable homofocale, démontrer que le lieu des foyers de (C) est une hyperbole équilatère.

N. Abramesco.

AVIS.

Nous avons la profonde douleur de faire part à nos lecteurs de la perte que la Rédaction des *Nouvelles Annales* vient de faire en la personne de M. C.-A. Laisant, mort le 4 mai 1920, à l'âge de 78 ans.

Nous consacrerons dans un prochain numéro un article à la carrière et à l'œuvre du savant distingué et de l'excellent homme que fut notre ami regretté.

R. Bricard. A. Boulanger.

[J2f]

SUR L'APPLICATION DE LA LOI DE GAUSS A LA POSITION PROBABLE D'UN POINT DANS LE PLAN OU DANS L'ESPACE (1);

Par M. J. HAAG.

Le but de cet article est d'exposer les résultats les plus importants auxquels conduit la loi de Gauss, quand on l'applique à l'étude de la probabilité de situation

(1) La presque totalité de cet article a fait l'objet d'une Note technique à la Commission de Gâvre, en date du 14 décembre 1916. Qu'il me soit permis de remercier ici M. l'ingénieur général Charbonnier, qui, en qualité de président de ladite Commission, a bien voulu m'autoriser à publier ultérieurement ces modestes résultats et m'a, en outre, été d'un précieux secours pour la bibliographie de la question.

d'un point dépendant *d'un nombre fini de paramètres indépendants*. Certains de ces résultats sont classiques, particulièrement en artillerie. D'autres sont beaucoup moins connus. Quelques-uns sont peut-être nouveaux. Quoi qu'il en soit, il paraît utile de les rassembler tous en un exposé synthétique et rigoureux.

Dans une première partie, j'établirai la formule qui donne la probabilité élémentaire, dans le cas le plus général.

Dans une seconde partie, j'appliquerai cette formule au calcul de la probabilité relative à certaines régions simples, pouvant se rencontrer dans la pratique.

Dans une troisième partie, je montrerai, en m'appuyant sur la seconde, comment la première est considérablement simplifiée par l'emploi des coordonnées tangentielles.

I.

1. Rappelons d'abord quelques définitions et notations.

Étant donnée une variable expérimentale α, dont la valeur la plus probable est zéro, la loi de Gauss consiste à admettre que la probabilité pour que la valeur numérique de cette variable qui résulte d'une expérience quelconque soit comprise entre α et $\alpha + d\alpha$ peut se mettre sous la forme

$$(1) \qquad P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{u^2}} \frac{d\alpha}{u} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt,$$

en posant

$$t = \frac{\alpha}{u}.$$

Les nombres α, t, u s'appellent *écart absolu* ou simplement *écart*, *écart relatif*, *unité d'écart* (Borel, *Théorie des probabilités*, p. 49).

La probabilité pour que α soit compris entre α_1 et α_2 est

$$(2) \qquad P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} [\Theta(t_2) - \Theta(t_1)],$$

en posant

$$t_1 = \frac{\alpha_1}{u}, \qquad t_2 = \frac{\alpha_2}{u},$$

$$(3) \qquad \Theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-t}^{+t} e^{-t^2} dt.$$

On appelle *écart moyen* la moyenne arithmétique de tous les écarts possibles, pris en valeur absolue. L'écart relatif moyen est donné par

$$(4) \qquad t_m = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} t\, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0,5663 \ldots.$$

L'écart absolu moyen est $e_m = u \,.\, t_m$.

On appelle *écart probable* ou mieux *écart médian* celui qu'on a la probabilité $\frac{1}{2}$ de ne pas dépasser en valeur absolue. L'écart relatif médian est donné par l'équation

$$(5) \qquad \Theta(t) = \frac{1}{2};$$

d'où l'on tire

$$(6) \qquad t_p = 0,4769\ldots, \qquad e_p = u \,.\, t_p = e_m \times 0,845 \ldots.$$

Si plusieurs variables *indépendantes* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ obéissent séparément à la loi de Gauss, avec les unités d'écart $u_1, u_2, \ldots, u_n$, leur somme

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$$

obéit aussi à la loi de Gauss, avec l'unité d'écart

$$(7) \qquad u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}.$$

2. Cela posé, soit un point M dont les coordonnées x, y, z sont des fonctions données de n paramètres indépendants $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Supposons que le point soit à l'origine quand tous les α_i sont nuls et, en outre, que x, y, z soient des fonctions continues et admettant des dérivées partielles pour ce système particulier de valeurs des α_i. On peut alors écrire, en supposant les α_i infiniment petits,

$$\begin{aligned} x &= A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + \ldots + A_n\alpha_n, \\ y &= B_1\alpha_1 + B_2\alpha_2 + \ldots + B_n\alpha_n, \\ z &= C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 + \ldots + C_n\alpha_n; \end{aligned}$$

les A_i, B_i, C_i désignant des constantes.

Supposons que les variables α_i soient des variables expérimentales, ayant toutes pour valeur moyenne zéro et obéissant à la loi de Gauss. Soient u_i l'unité d'écart de α_i et t_i l'écart relatif $\frac{\alpha_i}{u_i}$.

Les formules précédentes s'écrivent :

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= A_1 u_1 . t_1 + A_2 u_2 . t_2 + \ldots + A_n u_n . t_n, \\ y &= B_1 u_1 . t_1 + B_2 u_2 . t_2 + \ldots + B_n u_n . t_n, \\ z &= C_1 u_1 . t_1 + C_2 u_2 . t_2 + \ldots + C_n u_n . t_n. \end{aligned} \right.$$

Considérons les vecteurs $(OU_1), (OU_2), \ldots, (OU_n)$, dont les composantes sont $(A_i u_i, B_i u_i, C_i u_i)$. Nous les appellerons *vecteurs unitaires* relatifs aux variables t_1, $t_2, \ldots, t_n$. Les trois équations (8) équivalent à l'égalité géométrique

$$(9) \qquad (OM) = t_1(OU_1) + t_2(OU_2) + \ldots + t_n(OU_n).$$

Cela posé, proposons-nous de *calculer la probabilité* P *pour que le point* M *soit dans un petit volume* dV *environnant le point* $Q(x, y, z)$.

Il est clair que cette probabilité est entièrement déterminée par la seule connaissance des vecteurs (OU_i).

Imaginons un autre système de vecteurs unitaires (OV_1), (OV_2), ..., (OV_p).

Il lui correspond une certaine probabilité P'. Nous dirons que *les deux systèmes sont équivalents, si* $P = P'$.

Théorème. — *On ne change pas la probabilité* P, *si l'on remplace p quelconques des vecteurs* (OU_i) *par un système équivalent.*

L'ordre des vecteurs étant indifférent, nous pouvons supposer que les p vecteurs remplacés sont les p premiers.

Posons

$$(10) \qquad (OM') = t_1(OU_1) + t_2(OU_2) + \ldots + t_p(OU_p),$$

$$(11) \qquad (OM'') = t_{p+1}(OU_{p+1}) + \ldots + t_n(OU_n).$$

On a

$$(12) \qquad (OM) = (OM') + (OM'').$$

Soient x', y', z' les coordonnées de M' et x'', y'', z'' celles de M''. On a

$$(13) \qquad x = x' + x'', \qquad y = y' + y'', \qquad z = z' + z''$$

Soient

$$(14) \qquad f(x', y', z')\, dV'$$

la probabilité pour que M' soit dans un petit volume dV' environnant le point $Q'(x', y', z')$, et

$$(15) \qquad g(x'', y'', z'')\, dV''$$

la probabilité pour que M'' soit dans un petit volume dV'' environnant le point $Q''(x'', y'', z'')$.

Cela posé, calculons la probabilité P au moyen des probabilités (14) et (15). Si l'on se donne la position Q'

de M″, la probabilité pour que M soit dans dV est la même que la probabilité pour que M′ soit dans un volume égal environnant le point

$$(x - x'', y - y'', z - z''),$$

c'est-à-dire

$$f(x - x'', y - y'', z - z'')\, dV.$$

La *probabilité composée* pour que M soit dans dV et M″ dans dV'' est donc

$$f(x - x'', y - y'', z - z'')\, dV . g(x'', y'', z'')\, dV''.$$

La *probabilité totale* pour que M soit dans dV, M″ étant n'importe où dans l'espace, est

$$(16) \qquad P = dV . \int\int\int f(x - x'', y - y'', z - z'') \times g(x'', y'', z'')\, dV'',$$

l'intégrale étant étendue à tout l'espace du point M″.

Or, si l'on remplace les vecteurs (OU_1), (OU_2), ..., (OU_p) par un système équivalent, cela ne change pas, par hypothèse, la fonction f. Cela ne change évidemment pas non plus la fonction g. Dès lors, l'intégrale triple ci-dessus garde la même valeur, ainsi, par suite, que la probabilité P. C. Q. F. D.

Remarque. — La démonstration de ce théorème ne fait appel qu'aux notions de probabilité composée et de probabilité totale. Elle ne fait nullement intervenir la loi de Gauss et subsiste, par conséquent, quelle que soit la loi de probabilité envisagée. Mais, il n'est pas évident qu'avec une loi quelconque, il soit possible de trouver des systèmes de vecteurs équivalents, comme il arrive avec la loi de Gauss. Dès lors, le théorème ne semble être d'aucune utilité, si l'on n'admet pas cette loi.

3. Il nous est maintenant facile de résoudre le problème que nous nous sommes posé, en admettant, bien entendu, dorénavant, la loi de Gauss.

Premier cas. — *Les vecteurs* (OU_i) *ont tous la même direction.* — On peut les remplacer par un vecteur unique, de même direction et de longueur [n° 1, formule (7)]

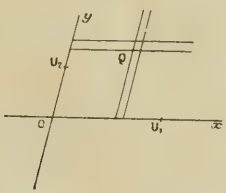
$$(17) \qquad OU = \sqrt{\overline{OU}_1^2 + \overline{OU}_2^2 + \ldots + \overline{OU}_n^2}.$$

Si l'on revient au cas général, on peut, dans l'hypothèse où plusieurs des vecteurs (OU_i) auraient la même direction, les remplacer par un vecteur unique donné par la règle ci-dessus. Cela résulte, en effet, du théorème démontré précédemment.

4. Deuxième cas. — *Les vecteurs* (OU_i) *sont dans un même plan.* — Supposons d'abord $n = 2$. Prenons Ox suivant OU_1, et Oy suivant OU_2.

Posons $OU_1 = a$, $OU_2 = b$.

Fig. 1.



La probabilité pour que x soit compris entre x et $x + dx$ est $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t_1^2} dt_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{a^2}} \frac{dx}{a}$.

De même, la probabilité pour que y soit compris entre y et $y + dy$ est $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t_2^2} dt_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{y^2}{b^2}} \frac{dy}{b}$.

Comme ces deux probabilités sont indépendantes, la probabilité pour que les deux conditions précédentes soient remplies simultanément est

$$(18) \qquad P = \frac{1}{\pi} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)} \frac{dx\,dy}{ab}.$$

Ceci n'est autre que la probabilité pour que le point M se trouve dans le parallélogramme de sommet $Q(x, y)$ et de côtés dx, dy. Si θ désigne l'angle xOy, l'aire de ce parallélogramme est

$$d\mathcal{A} = dx\,dy \sin\theta.$$

On a donc

$$(19) \quad P = \frac{1}{\pi ab \sin\theta} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)} d\mathcal{A} = \frac{1}{S} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)} d\mathcal{A},$$

en désignant par S l'aire de l'ellipse (E) qui admet OU_1 et OU_2 pour diamètres conjugués et qui a, par conséquent, pour équation

$$(20) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y}{b^2} = 1.$$

La probabilité pour que M soit dans une aire quelconque $\mathcal{A}$ est

$$(21) \qquad P = \frac{1}{S} \int\int_{(\mathcal{A})} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)} d\mathcal{A}$$

ou, en appliquant la formule de la moyenne,

$$(22) \qquad P = \frac{1}{S} e^{-\left(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}\right)} \mathcal{A}$$

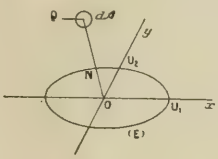
le point (x', y') étant un certain point de l'aire $\mathcal{A}$.

Si cette aire est infiniment petite, on a la *probabilité élémentaire* pour une aire élémentaire de forme quelconque :

$$(23) \qquad P = \frac{d\mathcal{A}}{S} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)},$$

le point $Q(x, y)$ étant un point quelconque de $d\lambda$. Considérons le point N où OQ rencontre l'ellipse (E).

Fig. 2.



Posons

$$\omega = \frac{OQ}{ON}, \tag{24}$$

on a

$$\omega^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2};$$

d'où

$$P = e^{-\omega^2} \frac{d\lambda}{S}. \tag{25}$$

On a mis ainsi la probabilité élémentaire sous une forme entièrement géométrique, où il *n'y a plus trace des vecteurs* (OU_1), (OU_2), mais *seulement de l'ellipse* (E). Cette ellipse, que nous appellerons *ellipse unitaire*, équivaut aux deux vecteurs unitaires (OU_1), (OU_2), et peut les remplacer, en particulier, dans l'application du théorème du n° **2**. Elle équivaut plus généralement à deux quelconques de ses demi-diamètres conjugués, ce qui nous permet d'énoncer le théorème suivant :

Le système des deux vecteurs

$$(OU_1)\cos\varphi - (OU_2)\sin\varphi, \quad (OU_1)\sin\varphi + (OU_2)\cos\varphi \tag{26}$$

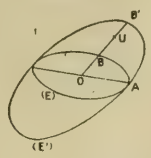
demeure équivalent à lui-même, quand on fait varier φ [1].

---

[1] Cette équivalence a été mise en évidence en 1876 par le capitaine Vallier dans la *Revue d'Artillerie*.

5. *Composition d'une ellipse et d'un vecteur, de deux ellipses, d'un nombre quelconque d'ellipses et de vecteurs.* — Soient *l'ellipse* (E) *et le vecteur* (OU).

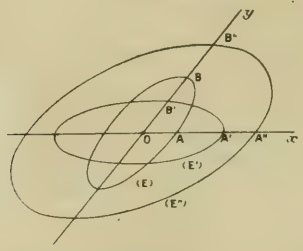
Fig. 3.



Nous pouvons remplacer (E) par les vecteurs (OA) et (OB), puis (OB) et (OU) par $(OB') = \sqrt{\overline{OB}^2 + \overline{OU}^2}$ (n° 3) et enfin (OB') et (OA) par l'ellipse (E') (¹).

Soient les deux ellipses (E) et (E'). Prenons leurs

Fig. 4.



diamètres conjugués communs Ox, Oy. Les deux ellipses peuvent être remplacées respectivement par les vecteurs (OA), (OB) et (OA'), (OB'). On peut ensuite remplacer (OA) et (OA') par

$$(OA'') = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{OA'}^2},$$

(¹) Cette règle a été démontrée en 1884 par le commandant Hermary dans son cours de l'École d'application de l'Artillerie et du Génie.

(OB) et (OB′) par

$$(OB'') = \sqrt{\overline{OB}^2 + \overline{OB'}^2}$$

et finalement (OA″) et (OB″) par l'ellipse (E″).

Si l'on a maintenent *un nombre quelconque d'ellipses et de vecteurs*, on pourra toujours, en appliquant un nombre suffisant de fois l'une ou l'autre des deux constructions précédentes, *les remplacer par une seule ellipse.*

En particulier, si l'on a affaire à n vecteurs, on aura résolu la question posée au n° 2, puisque, connaissant l'ellipse résultante, il suffit d'appliquer la formule (25).

6. Troisième cas. — *Les vecteurs* (OU_i) *ne sont pas dans un même plan.* — Supposons d'abord $n = 3$. Prenons les axes Ox suivant (OU_1), Oy suivant (OU_2), Oz suivant (OU_3). Posons

$$(27) \qquad OU_1 = a, \qquad OU_2 = b, \qquad OU_3 = c.$$

En raisonnant comme au n° 4, on trouve que la probabilité pour que M soit dans le parallélépipède élémentaire de sommet $Q(x, y, z)$ et de côtés dx, dy, dz, a pour expression

$$(28) \qquad \frac{1}{\pi\sqrt{\pi}}\, e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)}\, \frac{dx\,dy\,dz}{abc}$$

ou

$$(29) \qquad \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\, \frac{dV}{W}\, e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)},$$

en désignant par dV le volume du parallélépipède et par W celui de l'ellipsoïde (E), qui admet OU_1, OU_2, OU_3 pour diamètres conjugués et a pour équation

$$(30) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

La probabilité pour que M soit dans un volume (V) quelconque est

$$(31) \qquad P = \frac{4}{3\sqrt{\pi}\,W} \iiint_V e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)} dV.$$

Pour un volume infiniment petit de forme quelconque, elle s'écrit

$$(32) \qquad P = \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\, e^{-\omega^2} \frac{dV}{W},$$

en posant

$$(33) \qquad \omega^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

ou

$$(34) \qquad \omega = \frac{OQ}{ON},$$

N étant le point de rencontre de OQ avec l'ellipsoïde (E).

Sous cete forme entièrement géométrique, la probabilité ne renferme plus trace des vecteurs (OU_1), (OU_2), (OU_3). Elle ne dépend plus que de l'ellipsoïde (E), qui sera appelé *ellipsoïde unitaire*. Cet ellipsoïde équivaut, dans l'application du théorème du n° 2, à un système quelconque de trois demi-diamètres conjugués, considérés comme vecteurs unitaires.

7. *Composition des ellipsoïdes, ellipses et vecteurs.* — Tout ellipsoïde peut être considéré comme résultant de la composition d'un quelconque de ses demi-diamètres et de l'ellipse de section par le plan diamétral conjugué, et réciproquement.

Dès lors, si l'on veut composer *un ellipsoïde* (E) *et un vecteur* (OU), on décompose (E) suivant le demi-diamètre (OU') porté par OU et l'ellipse conjuguée (e).

On compose ensuite (OU′) avec (OU) en

$$(OU'') = \sqrt{\overline{OU}^2 + \overline{OU'}^2}$$

et enfin (OU″) avec (e) en un ellipsoïde (E′), circonscrit à (E) le long de (e) et passant par U″.

Pour composer *un ellipsoïde* (E) *avec une ellipse* (e), on décompose (E) suivant l'ellipse (e') qui a même plan que (e) et le demi-diamètre conjugué (OU); puis on compose (e) et (e'), comme au n° 5, suivant une ellipse (e'') et, enfin, (e'') avec (OU) suivant un ellipsoïde (E′).

Pour composer *deux ellipsoïdes* (E) *et* (E′) on les décompose suivant leurs demi-diamètres conjugués communs (OA), (OB), (OC) et (OA′), (OB′), (OC′). On compose OA avec OA′, OB avec OB′, OC avec OC′; puis on prend l'ellipsoïde résultant des trois vecteurs (OA″), (OB″), (OC″) obtenus.

Si l'on a maintenant *un nombre quelconque de vecteurs, ellipses et ellipsoïdes*, on pourra toujours, en appliquant un nombre suffisant de fois les constructions précédentes, les réduire à un seul ellipsoïde.

En particulier, si l'on a affaire à n vecteurs, on aura résolu, dans toute sa généralité, la question posée au n° 2.

8. *Expression analytique de la probabilité élémentaire.* — La formule (32) et la règle de composition précédente nous permettent théoriquement de calculer la probabilité élémentaire résultant d'un nombre quelconque de vecteurs (OU_i). Toutefois, nous n'avons pas l'expression analytique de cette probabilité en fonction des coordonnées x, y, z du point Q et des composantes a_i, b_i, c_i des vecteurs (OU_i) suivant les axes. On pourrait essayer de la déduire des résultats

précédemment obtenus. Mais il paraît plus simple d'employer une méthode directe.

Nous allons d'abord résoudre la question suivante.

Soit un point $M'(x', y', z')$ obéissant à la loi de probabilité

$$(35) \qquad P' = \frac{1}{k} e^{-f(x', y', z')} dV,$$

où k désigne une constante et $f(x', y', z')$ une forme quadratique donnée. Soit le vecteur (OU), de composantes a, b, c.

Considérons le point M défini par l'égalité géométrique

$$(36) \qquad (OM) = (OM') + t(OU),$$

t désignant une quantité variable indépendante de M' et obéissant à la loi de Gauss avec un écart unitaire égal à *un*. Proposons-nous de *calculer la probabilité élémentaire relative au point* M. A cet effet, il nous suffit d'appliquer la formule (16), en remarquant que $x'' = ta$, $y'' = tb$, $z'' = tc$. On a ainsi

$$P = \frac{1}{k} dV \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-f(x-ta, y-tb, z-tc)} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt$$

ou

$$P = \frac{dV}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-[A^2t^2 - 2Bt + f(x,y,z)]} dt,$$

en posant

$$(37) \qquad A^2 = 1 + f(a, b, c), \qquad 2B = xf'_a + yf'_b + zf'_c.$$

On peut écrire ensuite

$$P = \frac{dV}{k\sqrt{\pi}} e^{-\left[f(x,y,z) - \frac{B^2}{A^2}\right]} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(At - \frac{B}{A}\right)^2} dt.$$

L'intégrale du second membre est égale à

$$\frac{1}{A}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\theta^2}\,d\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{A}.$$

On a donc finalement

$$(38)\quad P = \frac{dV}{k\sqrt{1+f(a,b,c)}}\, e^{-\left[f(x,y,z)-\frac{\frac{1}{4}(xf'_a+yf'_b+zf'_c)^2}{1+f(a,b,c)}\right]},$$

c'est-à-dire une expression analogue à (35), mais avec une constante k_1 et une forme quadratique f_1 se déduisant de k et de f par les formules

$$(39)\qquad k_1 = k\sqrt{1+f(a,b,c)},$$

$$(40)\quad f_1(x,y,z) = f(x,y,z) - \frac{\left[\frac{1}{2}(xf'_a+yf'_b+zf'_c)\right]^2}{1+f(a,b,c)}.$$

Il serait facile de déduire de là une démonstration analytique directe de la règle donnée au n° 7 pour la composition d'un vecteur avec un ellipsoïde. Observons aussi que les formules (35), (39) et (40) s'appliquent en Géométrie plane, en supprimant z et c et remplaçant le volume dV par un aire $d\mathcal{A}$. On en déduirait la règle de composition du n° 5.

9. Arrivons maintenant au calcul de la probabilité P_n résultant de n vecteurs (OU_1), (OU_2), ..., (OU_n).

Premier cas. — *Les vecteurs* (OU_i) *sont portés par la même droite* Ox. — La probabilité dans un petit segment dl contenant le point Q d'abscisse x est

$$(41)\qquad P_n = \frac{dl}{\sqrt{\pi}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}\, e^{-\frac{x^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}$$

ou

$$(42)\qquad P_n = \frac{dl}{\sqrt{\pi}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\overline{OU_i}^2}}\, e^{-\frac{\overline{OQ}^2}{\sum_{i=1}^{n}\overline{OU_i}^2}}.$$

Cette dernière formule permettrait d'écrire la probabilité dans le cas où la droite portant les vecteurs ne serait pas prise pour axe des x.

10. Deuxième cas. — *Les vecteurs* (OU_i) *sont dans le même plan* xOy. — Supposons d'abord $n = 2$. L'ellipse unitaire a pour équation

$$(43)\qquad \frac{(b_1 x - a_1 y)^2 + (b_2 x - a_2 y)^2}{(b_1 a_2 - a_1 b_2)^2} = 1$$

et l'aire du parallélogramme construit sur OU_1 et OU_2 est $\sin\theta . |b_1 a_2 - a_1 b_2|$, θ désignant l'angle des axes de coordonnées. On a donc, d'après (19),

$$(44)\qquad P_2 = \frac{dl}{\pi |b_1 a_2 - a_2 b_1| \sin\theta}\, e^{-\frac{(b_1 x - a_1 y)^2 + (b_2 x - a_2 y)^2}{(b_1 a_2 - a_1 b_2)^2}}$$

ou

$$(45)\qquad P_2 = \frac{dl}{2\pi . (OU_1 U_2)}\, e^{-\frac{(OU_1 Q)^2 + (OU_2 Q)^2}{(OU_1 U_2)^2}},$$

en désignant par la notation (OAB) l'aire de triangle OAB.

Je dis maintenant que, pour toute valeur de n, on a

$$(46)\qquad P_n = \frac{dl}{2\pi\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}\sum (OU_i U_j)^2}}\, e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(OU_i Q)^2}{\sum_{i,j=1}^{n}\sum (OU_i U_j)^2}}.$$

ou

$$(47) \qquad P_n = \frac{d\lambda_0}{\pi \sin\theta \sqrt{Q_n}} e^{-\frac{S_n}{Q_n}},$$

en posant

$$(48) \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} (b_i x - a_i y)^2, \qquad Q_n = \sum_{i,j=1}^{n}\sum (b_i a_j - a_i b_j)^2.$$

Cette formule est vraie pour $n = 2$. Il nous suffit donc de prouver que, si elle est vraie pour $n - 1$, elle est vraie pour n. Comme S_n est une forme quadratique, nous pouvons appliquer les résultats du n° 8, pour composer les $n - 1$ premiers vecteurs avec le $n^{\text{ième}}$. D'après les formules (39) et (40), il nous faut démontrer les identités suivantes :

$$(49) \qquad Q_n = Q_{n-1}\left(1 + \frac{S_{n-1}}{Q_{n-1}}\right)_{x=a_n,\, y=b_n}$$

et

$$(50) \quad \frac{S_n}{Q_n} = \frac{S_{n-1}}{Q_{n-1}} - \frac{\left[\sum_{i=1}^{n-1} (b_i x - a_i y)(b_i a_n - a_i b_n)\right]^2}{Q_{n-1} Q_n}.$$

L'égalité (49) s'écrit

$$Q_n - Q_{n-1} = S_{n-1}(a_n, b_n) = \sum_{i=1}^{n-1} (b_i a_n - a_i b_n)^2.$$

Elle est évidemment vérifiée, en vertu de la définition même de Q_n.

Pour démontrer (50), posons, pour simplifier l'écriture,

$$(51) \qquad \Lambda_i = b_i x - a_i y, \qquad \Delta_{ij} = b_i a_j - a_i b_j.$$

L'égalité (50) s'écrit

$$\Lambda_n^2 Q_{n-1} = S_{n-1}(Q_n - Q_{n-1}) - \left(\sum_{i=1}^{n-1} \Lambda_i \Delta_{in}\right)^2$$

ou

$$A_n^2 Q_{n-1} = \left(\sum_{i=1}^{n-1} A_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} \Delta_{in}^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n-1} A_i \Delta_{in}\right)^2 \cdot$$

Appliquons au second membre l'identité de Lagrange; l'égalité devient

$$(52) \qquad A_n^2 Q_{n-1} = \sum_{i,j=1}^{n-1}\sum (A_i \Delta_{jn} - A_j \Delta_{in})^2 \cdot$$

Or, si l'on développe le déterminant nul

$$\begin{vmatrix} A_i & A_j & A_n \\ a_i & a_j & a_n \\ b_i & b_j & b_n \end{vmatrix}$$

suivant la première ligne, on obtient l'identité

$$A_i \Delta_{nj} - A_j \Delta_{ni} + A_n \Delta_{ji} = 0.$$

Portant dans (52), nous avons à démontrer que

$$A_n^2 Q_{n-1} = \sum_{i,j=1}^{n-1}\sum A_n^2 \Delta_{ij}^2 = A_n^2 \sum_{i,j=1}^{n-1}\sum \Delta_{ij}^2.$$

Cela résulte de la définition de Q_{n-1}. Finalement, la formule (47) est établie dans toute sa généralité.

11. Troisième cas. — *Les vecteurs* (OU_i) *ne sont pas dans un même plan.* — Supposons d'abord $n = 3$. L'ellipsoïde unitaire a pour équation

$$\frac{A_{23}^2 + A_{31}^2 + A_{12}^2}{\Delta_{123}^2} = 1,$$

en posant

$$(53) \qquad A_{ij} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{ijk} = \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \\ a_k & b_k & c_k \end{vmatrix}.$$

Le volume du parallélépipède construit sur (OU_1), (OU_2), (OU_3) est $\sigma\Delta_{123}$, en appelant σ le sinus du trièdre $Oxyz$. On a donc, d'après (32),

$$(54)\qquad P_3 = \frac{dV}{\pi\sqrt{\pi}\,\sigma\,|\Delta_{123}|}\, e^{-\frac{A_{23}^2 + A_{31}^2 + A_{12}^2}{\Delta_{123}^2}}$$

ou

$$(55)\quad P_3 = \frac{dV}{6\pi\sqrt{\pi}(OU_1U_2U_3)}\, e^{-\frac{OU_2U_3Q^2 + OU_3U_1Q^2 + OU_1U_2Q^2}{OU_1U_2U_3{}^2}},$$

en désignant par $(OABC)$ le volume du tétraèdre $OABC$.

Je dis maintenant que, pour toute valeur de n, on a

$$(56)\quad P_n = \frac{dV}{6\pi\sqrt{\pi}\sqrt{\sum\sum\sum_{i,j,k=1}^{n}(OU_iU_jU_k)^2}}\, e^{-\frac{\sum\sum_{i,j=1}^{n} OU_iU_jQ^2}{\sum\sum\sum_{i,j,k=1}^{n} OU_iU_jU_k{}^2}}$$

ou

$$(57)\qquad P_n = \frac{dV}{\pi\sqrt{\pi}\,\sigma\sqrt{Q_n}}\, e^{-\frac{S_n}{Q_n}},$$

en posant

$$(58)\qquad S_n = \sum\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}^2, \qquad Q_n = \sum\sum\sum_{i,j,k=1}^{n} \Delta_{ijk}^2.$$

Comme tout à l'heure, nous sommes ramenés à vérifier les identités

$$Q_n - Q_{n-1} = S_{n-1}(a_n, b_n, c_n) = \sum\sum_{i,j=1}^{n-1} \Delta_{ijn}^2,$$

qui résulte de la définition de Q_n et

$$\frac{S_n}{Q_n} = \frac{S_{n-1}}{Q_{n-1}} - \frac{\left(\sum\sum_{i,j=1}^{n-1} A_{ij}\Delta_{nij}\right)^2}{Q_nQ_{n-1}}$$

ou

$$(59)\qquad T_n Q_{n-1} = R_n S_{n-1} - \left(\sum_{i,j=1}^{n-1}\sum A_{ij}\Delta_{nij} \right)^2,$$

en posant

$$(60)\qquad T_n = S_n - S_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} A_{in}^2,$$

$$(61)\qquad R_n = Q_n - Q_{n-1} = \sum_{i,j=1}^{n-1}\sum \Delta_{nij}^2.$$

Si l'on applique au second membre de (59) l'identité de Lagrange, il faut démontrer que

$$(62)\qquad T_n Q_{n-1} = \sum_{i,j,k,p=1}^{n-1}\sum\sum\sum (A_{ij}\Delta_{nkp} - A_{kp}\Delta_{nij})^2.$$

Avant d'aller plus loin, il convient de bien préciser la manière dont doivent être formées les sommes multiples ci-dessus introduites. Dans les sommes doubles et triples figurant dans (58), (59) et (61), on doit prendre pour (i, j) ou (i, j, k) toutes les *combinaisons simples* deux à deux ou trois à trois des n ou $n-1$ premiers nombres entiers. Dans la somme quadruple de (62), on doit prendre pour (i, j, k, p) tous les *arrangements à répétition* des $n-1$ premiers nombres entiers quatre à quatre, mais en ne regardant pas comme distincts deux arrangements déduits l'un de l'autre par l'échange de i et de j, ou de k et de p, ou de (i, j) et de (k, p). De sorte que *toute combinaison à répétition* $(ijkp)$ donne seulement les trois termes distincts

$$(63)\qquad \sigma_{ijkp} = \rho_{ijkp}^2 + \rho_{ikpj}^2 + \rho_{ipjk}^2,$$

en posant

$$(64)\qquad \rho_{ijkp} = A_{ij}\Delta_{nkp} - A_{kp}\Delta_{nij}.$$

Cela posé, nous allons transformer ρ_{ijkp}. A cet effet, considérons le déterminant du sixième ordre

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y & z & 0 & 0 & 0 \\ a_n & b_n & c_n & a_n & b_n & c_n \\ a_i & b_i & c_i & a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j & a_j & b_j & c_j \\ \lambda a_k & \lambda b_k & \lambda c_k & a_k & b_k & c_k \\ \mu a_p & \mu b_p & \mu c_p & a_p & b_p & c_p \end{vmatrix}.$$

Développons-le par la règle de Laplace suivant les trois premières colonnes, d'abord tel qu'il est écrit, puis en retranchant la quatrième colonne de la première, la cinquième de la seconde et la sixième de la troisième. En égalant les deux développements, nous obtenons l'identité

$$\begin{aligned} A_{ni}\Delta_{jkp} - A_{nj}\Delta_{ikp} + \lambda A_{nk}\Delta_{ijp} - \mu A_{np}\Delta_{ijk} + A_{ij}\Delta_{nkp} \\ - \lambda A_{ik}\Delta_{njp} + \mu A_{ip}\Delta_{njk} + \lambda A_{jk}\Delta_{nip} \\ - \mu A_{jp}\Delta_{nik} + \lambda\mu A_{kp}\Delta_{nij} = (\lambda - 1)(\mu - 1)A_{kp}\Delta_{nij}. \end{aligned}$$

Ceci doit avoir lieu, quels que soient λ et μ. On en déduit les trois identités

$$(65)\quad \left\{ \begin{aligned} A_{ni}\Delta_{jkp} - A_{nj}\Delta_{ikp} + A_{ij}\Delta_{nkp} - A_{kp}\Delta_{nij} &= 0, \\ A_{nk}\Delta_{ijp} - A_{ik}\Delta_{njp} + A_{jk}\Delta_{nip} + A_{kp}\Delta_{nij} &= 0, \\ -A_{np}\Delta_{ijk} + A_{ip}\Delta_{njk} - A_{jp}\Delta_{nik} + A_{kp}\Delta_{nij} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Les deux dernières rentrent dans le type suivant :

$$(66)\quad A_{ni}\Delta_{jkp} - A_{nj}\Delta_{kpi} + A_{nk}\Delta_{pij} - A_{np}\Delta_{ijk} = 0.$$

Quant à la première, elle nous donne

$$\rho_{ijkp} = A_{nj}\Delta_{ikp} - A_{ni}\Delta_{jkp}.$$

Portons dans (63) :

$$\begin{aligned} \sigma_{ijkp} = {} & (A_{nj}\Delta_{ikp} - A_{ni}\Delta_{jkp})^2 + (A_{nk}\Delta_{ipj} - A_{ni}\Delta_{kpj})^2 \\ & + (A_{np}\Delta_{ijk} - A_{ni}\Delta_{pjk})^2 \\ = {} & A_{nj}^2\Delta_{ikp}^2 + A_{nk}^2\Delta_{ipj}^2 + A_{np}^2\Delta_{ijk}^2 + 3A_{ni}^2\Delta_{jkp}^2 \\ & - 2A_{ni}\Delta_{jkp}(A_{nj}\Delta_{ikp} + A_{nk}\Delta_{ipj} + A_{np}\Delta_{ijk}). \end{aligned}$$

Mais, d'après (66), la parenthèse du dernier membre égale $A_{ni}\Delta_{jkp}$. Donc

$$(67)\quad \sigma_{ijkp} = A_{ni}^2\Delta_{jkp}^2 + A_{nj}^2\Delta_{kpi}^2 + A_{nk}^2\Delta_{pij}^2 + A_{np}^2 A_{ijk}^2.$$

Le second membre de (62) s'écrit finalement

$$(68)\quad \sum\sum\sum\sum_{i,\,j,\,k,\,p=1}^{n-1}(A_{ni}^2\Delta_{jkp}^2 + A_{nj}^2\Delta_{kpi}^2 + A_{nk}^2\Delta_{pij}^2 + A_{np}^2\Delta_{ijk}^2),$$

les différents termes étant obtenus en partant des combinaisons à répétition $(ijkp)$. Cherchons ceux qui renferment A_{ni}^2. Ils sont donnés par les combinaisons $(ijkp)$ obtenues en faisant suivre la lettre i de toutes les combinaisons à répétition (jkp). Il s'ensuit que le coefficient de A_{ni}^2 est $\sum\sum\sum_{j,\,k,\,p=1}^{n-1}\Delta_{jkp}^2 = Q_{n-1}$, car il est indifférent de former cette somme triple en partant des combinaisons à répétition ou des combinaisons simples (jkp), puisque Δ_{jkp} est nul dès que deux de ses indices sont égaux. Finalement, la somme (68) est égale à $Q_{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1} A_{ni}^2\right) = Q_{n-1}\,T_n$. L'identité (62) est donc établie et, avec elle, les formules (57) et (56).

(*A suivre.*)

[O¹2qβ]

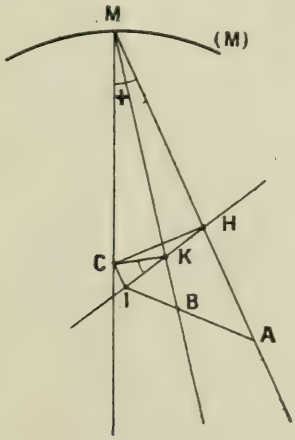
SUR UN THÉORÈME DE CORNU RELATIF AUX CAUSTIQUES;

PAR M. T. LEMOYNE.

Dans les *Nouvelles Annales* de 1915, M. d'Ocagne a donné une démonstration géométrique fort élégante

d'un théorème de Cornu concernant la construction des caustiques, démonstration qu'il a introduite depuis dans son *Cours de Géométrie pure et appliquée de l'École Polytechnique*, t. I, p. 142, comme application d'une formule de géométrie infinitésimale due à Mannheim.

Je me propose de montrer que le théorème de Cornu est une conséquence presque immédiate de la formule classique de Thomas Young, qui lie les longueurs des rayons incident et réfracté des caustiques. (La formule de Thomas Young est étudiée dans les Traités d'Optique géométrique; elle figure en particulier dans le *Cours de Physique* de Fernet et Faivre-Dupaigre, pour la classe de Mathématiques spéciales, 4e édition, p. 166. Nous en avons donné une démonstration géo-



métrique simple, d'ailleurs bien connue, dans notre Ouvrage, *Courbes géométriques remarquables*, t. I, p. 128.)

Soient MA et MB (*voir* figure) un rayon incident et le rayon réfracté correspondant, A et B les points où ils

touchent respectivement leurs enveloppes, M le point où ils rencontrent la courbe dirimante (M), C le centre de courbure de (M) en ce point. Posons $MA = l$, $MB = l'$, $MC = R$ et désignons par i et r les angles d'incidence et de réfraction. La formule de Thomas Young s'écrit

$$\frac{n\cos^2 r}{l'} - \frac{\cos^2 i}{l} = \frac{n\cos r - \cos i}{R}.$$

En multipliant les deux membres par $ll'R$, on la met sous la forme

$$R(nl\cos^2 r - l'\cos^2 i) = ll'(n\cos r - \cos i)$$

ou

$$nl\cos r(l' - R\cos r) = l'\cos i(l - R\cos i),$$

ce qu'on peut écrire

$$\frac{l}{l'}\,\frac{l' - R\cos r}{l - R\cos i}\,\frac{n\cos r}{\cos i} = 1.$$

Projetons C en H et K sur MA, MB, et en I sur HK. Nous avons

$$\frac{l}{l'} = \frac{AM}{BM}, \qquad \frac{l' - R\cos r}{l - R\cos i} = \frac{BK}{AH},$$

$$\frac{n\cos r}{\cos i} = \frac{R\sin i\cos r}{R\sin r\cos i} = \frac{CH\cos r}{CK\cos i} = \frac{IH}{IK}$$

et, par conséquent, la formule de Young s'écrit finalement

$$\frac{AM}{AH}\,\frac{IH}{IK}\,\frac{BK}{BM} = 1.$$

Sous cette forme, elle montre, d'après la réciproque du théorème de Ménélaüs appliqué au triangle MHK, que les points I, A, B sont en ligne droite. Donc :

Théorème de Cornu. — *La droite qui joint les points* A *et* B *où le rayon incident* MA *et le rayon*

réfracté MB *touchent leurs enveloppes, passe par la projection orthogonale* I *du centre de courbure* C *de la courbe dirimante en* M *sur la droite* HK *qui joint les projections orthogonales de ce même centre* C *sur les rayons* MA *et* MB.

Dans le cas de la réflexion, MA et MB sont symétriques par rapport à la normale MC, et HK est perpendiculaire à MC. On retrouve alors la construction suivante du point où MB touche son enveloppe, énoncée par J.-H. Grillet, dans le *Journal de Liouville*, 1846, t. XI, p. 104 :

Quand un rayon lumineux issu d'une source A *se réfléchit en un point* M *d'une courbe* (M), *le point où le rayon réfléchi* MB *touche la caustique s'obtient en projetant orthogonalement en* K *sur* MB *le centre de courbure de la courbe* (M) *au point* M, *puis* K *en* I *sur la normale* MC ; *la droite* AI *coupe le rayon réfléchi au point cherché.*

Cette construction se déduit encore avec facilité de la formule de Petit :

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{l'} = \frac{2}{R \cos i},$$

qu'on obtient d'ailleurs en faisant $n = -1$ et $i = r$ dans celle de Thomas Young.

CHRONIQUE.

Décès.

Le géomètre danois Zeuthen est mort le 6 janvier 1920, à Copenhague, à l'âge de 81 ans.

Le géomètre russe Liapounoff, professeur à l'Université de Pétrograd, est mort le 18 février 1919, à l'âge de 62 ans.

M. A. Hurwitz, professeur à l'École Polytechnique de Zurich depuis 1892, est mort dans cette ville au mois de novembre 1919, âgé de 60 ans : ses travaux sur la théorie des fonctions modulaires elliptiques et sur l'application de la série de Fourier au problème des isopérimètres sont très remarquables.

Élections.

M. Luighi Bianchi a été élu correspondant de l'Académie des Sciences en remplacement de M. Vito Volterra, élu associé étranger.

M. G.-H. Hardy est nommé professeur de Mathématiques pures à l'Université d'Oxford. Il est secrétaire de la Société mathématique de Londres.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 1920 (1er trimestre).

J. Hadamard : Les solutions élémentaires des équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques non analytiques (p. 150). — P. Boutroux : Sur une famille de fonctions multiformes associées à une équation du premier ordre (p. 164). — G. Valiron : Le théorème de M. Picard et les généralisations de M. Borel (p. 191). — M. d'Ocagne : Sur la distribution des courbures autour d'un point d'une surface (p. 194). — R. Birkeland : Réduction des intégrales abéliennes (p. 316). — G. Humbert : Sur les formes quadratiques positives d'Hermite dans un corps quadratique imaginaire (p. 344). — J. Hadamard : Sur certaines solutions d'une équation aux dérivées fonctionnelles (p. 355). — G. Cerf : Remarques sur une généralisation du problème de Pfaff (p. 374). — D. Pompeiu : Sur une condition générale de la monogénéité et sur la démonstration du théorème fondamental de Cauchy (p. 377). — Nilos Sakellariu : La courbure

linéaire et aérale oblique d'une surface (p. 446). — H. Villat. Sur certains mouvements cycliques avec ou sans tourbillons (p. 449). — G. Humbert : Sur le nombre des classes de formes quadratiques positives d'Hermite, de discriminant donné, dans un corps quadratique imaginaire (p. 481). — N.-E. Nörlund : Sur la convergence de certaines séries (p. 506). — A. Rosenblatt : Sur un théorème de Liapounoff (p. 510). — G. Humbert : Sur une extension du groupe modulaire dans un corps quadratique imaginaire (p. 541). — Cl. Guichard : Sur une propriété caractéristique des congruences qui appartiennent à un complexe linéaire (p. 552). — B. Gambier : Surfaces de translation applicables l'une sur l'autre (p. 560). — M. Fréchet : Sur la famille complète dérivée de la famille des ensembles bien définis (p. 563). — P. Humbert : Sur les fonctions dérivées de l'hypercylindre parabolique (p. 564). — M. Renaux : Sur un problème d'itération (p. 567). — F. Kempé de Fériet : Sur une application des dérivées généralisées à la formation et à l'intégration de certaines équations différentielles linéaires (p. 569). — L. de Peslouan : Sur l'extension de la règle de L'Hopital à certaines quantités arithmétiques (p. 572). — J. Chazy : Sur les singularités impossibles du problème des n corps (p. 575). — G. Humbert : Sur les groupes de Bianchi (p. 625). — B. Gambier : Sur les surfaces applicables (p. 645). — Ch. Rabut : Sur le groupe des transformations planes dans lesquelles toute droite reste droite (p. 648). — A. Châtelet : Sur les corps abéliens de degré premier (p. 651). — H. Villat : Sur le mouvement variable d'un fluide indéfini avec sillage, en présence d'un corps solide (p. 653). — R. Thiry : Sur un problème d'hydrodynamique admettant une infinité de solutions (p. 656). — N.-E. Nörlund : Sur un théorème de Cauchy (p. 715). — G. Julia : Sur les familles de fonctions de plusieurs variables (p. 791). — H. Mineur : Sur les solutions discontinues de certaines équations fonctionnelles (p. 793).

BIBLIOGRAPHIE.

H. Brocard et T. Lemoyne. — *Courbes géométriques remarquables (courbes spéciales) planes et gauches*, t. I,

1 vol. de $25^{cm} \times 16^{cm}$, de VIII + 451 pages. Paris, Vuibert, 1919. Prix : 15^{fr} (plus 20 pour 100 de majoration temporaire).

Il existe déjà plusieurs Ouvrages sur les courbes remarquables, mais celui de MM. Brocard et Lemoyne se distingue par l'originalité de son plan, par la richesse de son contenu, et paraît appelé à rendre de grands services.

Les courbes y sont présentées suivant l'ordre alphabétique de leurs noms, ordre judicieux dans un Ouvrage écrit en vue de ceux qui veulent être rapidement renseignés sur un point de détail. Le Tome I va de l'article *Abaque* à l'article *Courbe auxiliaire*. Les démonstrations des propriétés énoncées, qui sont très nombreuses, sont naturellement le plus souvent omises. Naturellement aussi, la bibliographie est très développée.

Il est parlé des courbes tout à fait particulières, des courbes plus générales qui font partie d'une famille importante telles que les anallagmatiques, des courbes qu'un certain mode de génération fait dériver d'une autre courbe, telles que les caustiques, des courbes qui ont une relation remarquable avec une figure, telles que les nombreux cercles attachés à un triangle.

Il faut signaler comme importants et riches les articles sur les *Coniques* et sur les *Courbes algébriques* générales, et une mention particulière doit être faite des développements consacrés à la théorie des *Caractéristiques*. Cette théorie, née des travaux de Chasles, n'est guère cultivée en France, depuis Halphen, qui a rectifié certains résultats de son prédécesseur, et il n'existe pas chez nous d'Ouvrage d'ensemble sur la Géométrie énumérative, tel qu'en ont les Allemands, par exemple. Il est désirable que l'Ouvrage de MM. Brocard et Lemoyne ramène l'attention sur un sujet qui

n'est pas épuisé, et dont les principes mêmes n'ont peut-être pas encore acquis une précision parfaite.

Outre l'intérêt que présente ce beau livre pour les amis de la Géométrie, il peut constituer une véritable mine pour les professeurs en quête d'exercices instructifs et sortant de la banalité. R. B.

CERTIFICAT D'ASTRONOMIE.

Clermont-Ferrand.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Mouvement géocentrique des planètes. Conjonctions. Oppositions. Révolution synodique. Étude de la longitude. Étude de l'élongation.*

2° *Théodolite; ses principaux organes; leur usage.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Le demi-grand axe de l'orbite d'une planète est*

$$1,52368 = a,$$

son excentricité est $0,0933 = e$; *la longitude du périhélie est* $334^\circ 13' 6''$ *et l'inclinaison du plan de l'orbite négligeable; calculer la longitude héliocentrique de la planète 450 jours moyens après son passage au périhélie.*

(Juillet 1919.)

Grenoble.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Influence de l'*Aberration* sur la position apparente d'une étoile. *Formules générales pour* Æ *et* ⊕. *Aberration annuelle en* Æ *et* ⊕. *Aberration annuelle en* l *et* λ. *Orbite d'aberration. Aberration diurne en* Æ *et* ⊕.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Problème de Képler. — On donne* $m = 62^\circ 28' 54'',6$ *et* $e = 0,01679226$.

Calculer l'anomalie excentrique u, *l'anomalie vraie* θ *et le rayon vecteur relatif* $\frac{r}{a}$.

On calculera u par la méthode d'approximation de Newton et par celle des substitutions successives, avec une approximation de 0″,01.

On calculera aussi la longitude ☾ dans l'orbite, sachant que la longitude ϖ *du périgée est*

$$\varpi = 281^\circ 31' 9''.$$

(Juin 1919.)

Épreuve théorique. — *Corrections en parallaxe, à une heure sidérale donnée, pour l'ascension droite* Æ, *la déclinaison* Ⓓ *et la distance* Δ *d'un astre quand on passe des coordonnées géocentriques* Æ, Ⓓ, Δ *de cet astre aux coordonnées apparentes* Æ′, Ⓓ′, Δ' *pour un lieu de la Terre dont le rayon géocentrique est* ρ *et la latitude géocentrique* λ'.

Formules rigoureuses. Cas de la Lune.

Approximations pour les planètes.

Épreuve pratique. — *Passage des coordonnées équatoriales* Æ *et* Ⓓ *d'une étoile à ses coordonnées écliptiques, l'obliquité de l'écliptique étant* ω.

Application numérique :

$$Æ = 14^h\, 57^m\, 48^s,26,$$
$$Ⓓ = 21^\circ 51' 34'',60,$$
$$\omega = 23^\circ 27' 26'',75.$$

On appliquera les formules suivantes qu'on devra d'ailleurs établir, φ *étant un angle auxiliaire :*

$$\tang \varphi = \cos Ⓓ \sin Æ,$$
$$\sin \lambda = \frac{\sin Ⓓ \cos(\omega + \varphi)}{\cos \varphi},$$
$$\tang l = \frac{\tang Æ \sin(\omega + \varphi)}{\sin \varphi},$$
$$\cos l \cos \lambda = \cos Ⓓ \cos Æ.$$

(Novembre 1919.)

Montpellier.

Épreuve théorique. — *Mouvement elliptique d'une planète autour du Soleil. Equation de Képler.*

Épreuve pratique. — *Résoudre un triangle sphérique connaissant les trois côtés :*

$$a = 70^\circ 30', \qquad b = 68^\circ 39' 59'', \qquad c = 23^\circ 26' ;$$

vérifier le résultat par l'analogie des sinus et par la formule fondamentale.

(Juin 1919.)

Les recueils d'*Exercices d'Astronomie* de Gruey et de Villié fournissent des modèles de calcul pour les questions qui précèdent.

CERTIFICAT DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

Paris.

Épreuve théorique. — *Équilibre d'élasticité d'un solide massif homogène et isotrope sous l'action de pressions normales données, s'exerçant sur une région centrale d'une face plane de ce corps, lorsque les points du corps très éloignés de cette région sont maintenus fixes.*

Solution. — Les équations indéfinies et aux limites qui résolvent ce problème peuvent être intégrées au moyen d'un potentiel logarithmique à trois variables.

La solution est développée dans le livre de M. J. Boussinesq, intitulé :

Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques (1885), pages 50-80.

Épreuve pratique. — *Une pression normale de* 1^{kg} *se trouvant appliquée à une très petite partie centrale de la surface d'un solide massif, homogène et isotrope en équilibre, on considère dans celui-ci les couches sous-jacentes, c'est-à-dire parallèles à la surface, à des profondeurs de plus en plus grandes au-dessous ; et, ayant tracé autour de la normale intérieure, menée par le centre de la petite région d'application, trois cônes dont les génératrices fassent respectivement, avec cette normale, des angles*

de 30°, 45° et 60°, on demande quelle est, à un gramme près, la fraction de la pression extérieure qui se trouve transmise à la partie des couches profondes située dans l'intérieur de chacun de ces trois cônes.

Le centre de la région d'application est pris, bien entendu, comme sommet des cônes.

Solution. — Les expressions des pressions intérieures auxquelles conduit le problème précédent prennent une forme très simple et susceptible d'interprétation géométrique quand le potentiel se réduit à un seul de ses éléments, c'est-à-dire quand on suppose qu'il y a seulement une pression normale dP, répartie sur un élément $d\sigma$ de la surface.

Si l'on prend le centre de $d\sigma$ pour origine O des coordonnées et la normale intérieure pour axe des z, la pression exercée par unité d'aire est, en chaque point de la couche horizontale de profondeur z, dirigée suivant le prolongement du rayon r allant de l'origine à ce point, et a pour valeur $\frac{3\,dP}{2\pi}\left(\frac{z}{r^2}\right)^2$.

Si l'on considère, dans la couche de profondeur z, une couronne circulaire ayant son centre sur Oz, de rayons R et $R + dR$, les composantes p_x, p_y des pressions s'y neutralisent, mais les composantes suivant Oz s'y ajoutent. La pression totale sur la couronne sera

$$\frac{3\,dP}{2\pi}\left(\frac{z}{r^2}\right)^2 \frac{z}{r}\cdot 2\pi R\,dR \qquad \text{ou} \qquad dP.d\left(-\frac{z^3}{r^3}\right),$$

en observant que $r^2 = z^2 + R^2$ (où z est constant). Pour l'aire entière du cercle de rayon R, on aura donc $dP\left(1 - \frac{z^3}{r^3}\right)$, ou, en appelant α le demi-angle d'ouverture du cône ayant pour sommet le point O et pour base le cercle, $(1 - \cos^3\alpha)\,dP$. Ainsi la fraction du poids dP que porte le cercle est $1 - \cos^3\alpha$.

Cette fraction est :

Pour $\alpha = 30^\circ \ldots\ldots \quad 1 - \frac{3\sqrt{3}}{8} = 0{,}3505$;

» $\alpha = 45 \ldots\ldots \quad 1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0{,}64645 \left(\text{environ } \frac{2}{3}\right)$;

» $\alpha = 60 \ldots\ldots \quad 1 - \frac{1}{8} = 0{,}8750$.

Les produits de ces coefficients par 1000 sont les nombres de grammes demandés. (Juin 1919.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1820.

(1899, p. 196; 1917, p. 357.)

Étant donnés dans un même plan, un faisceau de coniques ayant entre elles un double contact et une courbe algébrique C_m^n, *on mène les tangentes communes à* C_m^n *et à chaque conique; déterminer le lieu des points de contact sur les coniques.* V. Retali.

Solution
Par M. R. Bouvaist.

Si aux points A et B où se touchent les coniques du faisceau considéré on fait correspondre les points cycliques, ces coniques deviennent un faisceau de cercles concentriques. Le lieu cherché devient la podaire de la courbe transformée de C_m^n, par rapport au centre commun de ces cercles.

1821.

(1899, p. 146; 1917, p. 357.)

Le lieu des sommets des paraboles tangentes à une conique centrale et ayant pour foyer un point fixe est une courbe unicursale du douzième ordre et de la dixième classe, ayant un point sextuple, avec deux coïncidences, en le point fixe et en chacun des points circulaires à l'infini; ayant, en outre, quatre points doubles ordinaires et six rebroussements. V. Retali.

Solution
Par M. M.-F. Egan.

Soient O le point fixe, P le point de contact de la conique (C) avec la parabole, S le sommet de celle-ci, M le point de rencontre des tangentes en P et S. Les angles OSM, OMP sont droits, et les angles OMS, OPM sont égaux; donc M décrit

la podaire de (C) par rapport à O, et S décrit la podaire de cette podaire.

On constate facilement que la podaire d'une courbe unicursale est unicursale. Cela posé, tout le reste de l'énoncé découle des formules données par Salmon [1] pour les podaires, et des formules de Plücker.

Autre solution par M. H. de Montille.

1890.

(1900, p. 574; 1917, p. 399.)

Lorsque trois triangles sont homologiques deux à deux, si dans le triangle formé par les trois axes d'homologie, un sommet est un centre d'homologie, chacun des deux autres sommets est aussi un centre d'homologie.

C. Blanc.

Solution

Par M. R. B.

Démontrons la proposition corrélative, qui s'énonce ainsi :

Lorsque trois triangles sont homologiques deux à deux, si dans le triangle formé par les trois centres d'homologie, un côté est un axe d'homologie, chacun des deux autres côtés est aussi un axe d'homologie.

Or cela résulte du théorème suivant, connu et d'ailleurs facile à établir par des considérations d'homographie.

Si un triangle (T) *est inscrit à un triangle* (T'), *il existe une infinité de triangles circonscrits à* (T') *et inscrits à* (T).

Soient $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ les trois triangles de l'énoncé, O_1, O_2, O_3 leurs trois centres d'homologie (O_1 est le centre d'homologie de $A_2B_2C_2$ et $A_3B_3C_3$, etc.). Supposons que O_2O_3 soit l'axe d'homologie des triangles $A_2B_2C_2$ et $A_3B_3C_3$. Alors A_2B_2 et A_3B_3 par exemple se coupent en un point γ_1 appartenant à O_2O_3.

Soient γ_2 le point où $\gamma_1A_3B_3$ rencontre O_1O_3, et γ_3 le point où $\gamma_1A_2B_2$ rencontre O_1O_2. Le triangle (T) ou $O_1O_2O_3$ est inscrit au triangle (T') ou $A_1A_2A_3$. Le triangle $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ est

---

[1] *Higher Planes Curves* 1873, § 122, p. 103.

inscrit à (T) et a deux côtés, $\gamma_1\gamma_3$ et $\gamma_1\gamma_2$, passant respectivement par les sommets A_2 et A_3 de (T'). Donc, en vertu du théorème rappelé, son troisième côté $\gamma_2\gamma_3$ passe par le troisième sommet A_1 de (T'). Il passe de même par B_1. Autrement dit, A_1B_1 et A_2B_2 se coupent sur O_1O_2, A_1B_1 et A_3B_3 se coupent sur O_1O_3.

On a les mêmes relations entre A_1C_1 et A_2C_2 d'une part, A_1C_1 et A_3C_3 de l'autre. Donc O_1O_2 est l'axe d'homologie de $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$, O_1O_3 l'axe d'homologie de $A_1B_1C_1$ et $A_3B_3C_3$. C'est bien ce qu'il fallait établir.

Autre solution par M. H. de Montille.

2010.

(1905, p. 96; 1917, p. 468)

Si les triangles $a_1b_1c_1$, $a_2b_2c_2$, $a_3b_3c_3$ (désignés par leurs côtés) ont un centre O *d'homologie, les neuf points de rencontre des droites du tableau*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

avec leurs associées mineures *sont en ligne droite.* [*L'associée mineure de a_1 est la droite (b_2c_3, b_3c_2)*] (1).

P. Sondat.

Solution

Par M. R. B.

Désignons par α, β, γ les droites, issues du point O, qui contiennent les sommets des trois triangles, et soit

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

le tableau des associées mineures de leurs côtés. On observera

(1) L'énoncé contenait une faute d'impression : *trièdre* au lieu de *triangle*. De plus, il a paru avantageux de changer légèrement la notation.

que trois droites, désignées par une capitale et deux minuscules, affectées de trois indices différents, par exemple A_1, b_2 et c_3 sont concourantes. Cela résulte immédiatement de la définition de A_1.

Les triangles $a_2b_2c_2$, $a_3b_3c_3$ étant homologiques, les points (a_2a_3), (b_2b_3), (c_2c_3) sont en ligne droite. Donc les triangles $a_3b_2c_2$, $a_2b_3c_3$ sont aussi homologiques, et les trois droites

$$(b_2c_2,\ b_3c_3) \text{ ou } \alpha,\quad (c_2a_3,\ c_3a_2) \text{ ou } B_1,\quad (a_3b_2,\ a_2b_3) \text{ ou } C_1$$

sont concourantes. Autrement dit, B_1 et C_1 se coupent sur α. De même C_1 et A_1 sur β, A_1 et B_1 sur γ. Les droites $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ donnent lieu à des remarques analogues. En définitive, *les trois triangles* $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ *ont leurs sommets sur* α, β, γ *et sont par conséquent en relation d'homologie avec chacun des triangles* $a_1b_1c_1$, $a_2b_2c_2$, $a_3b_3c_3$.

Considérons maintenant les deux triangles $a_2B_1C_1$ et $A_2b_1c_1$. On reconnaît que :

Les sommets B_1C_1 et b_1c_1 sont tous deux sur α,
Les sommets C_1a_2 et c_1A_2 sont tous deux sur b_3,
Les sommets a_2B_1 et A_2b_1 sont tous deux sur c_3,

les deux derniers faits résultant d'une remarque faite au début. Or les droites α, b_3, c_3 concourent. Les deux triangles dont il s'agit sont donc homologiques, et l'on en conclut que les points a_2A_2, B_1b_1, C_1c_1 sont en ligne droite, c'est-à-dire que le point a_2A_2 est sur l'axe d'homologie des triangles $a_1b_1c_1$, $A_1B_1C_1$. Il en est de même du point b_2B_2. Donc l'axe d'homologie des triangles $a_2b_2c_2$, $A_2B_2C_2$ est confondu avec le premier axe. Il en est encore ainsi de l'axe d'homologie des triangles $a_3b_3c_3$, $A_3B_3C_3$, ce qui établit la proposition.

2064.

(1907, p. 95 1917, p. 470.)

Un point C *se meut sur un cercle de rayon égal à l'unité. Un autre, situé originellement au centre* O *du cercle, se meut avec la même vitesse que* C *sur une courbe dont la tangente passe constamment par ce point. Démontrer que le rayon de courbure en un point quelconque* M *de cette*

courbe est égal au segment intercepté sur le rayon OC *par la normale en* M.

2065.

(1907, p. 95; 1917, p. 470.)

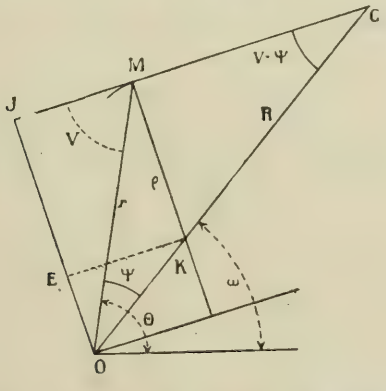
On considère le rayon de courbure ρ *de la courbe, dont il s'agit dans la question précédente, comme fonction de la distance* p *de l'origine à la tangente à cette courbe. Former l'équation différentielle qui lie* ρ *à* p.

W. Kapteyn

Solution

Par M. H. de Montille [1].

En appelant Ψ la différence $\theta - \omega$ des angles polaires respectifs $\widehat{MOx}$ et $\widehat{COx}$ des points M et C, R (pour l'homogé-



néité) le rayon du cercle, les relations des sinus des angles des triangles MOK, OCM donnent (K étant le centre de

---

[1] La question 2064 a été résolue par une lettre de M. M. d'Ocagne (**1907**, p. 173). Son énoncé n'est rappelé que pour rendre intelligible l'énoncé 2065.

courbure), en posant $OM = r$, $\widehat{OMC} = \pi - V$:

$$(1) \qquad \frac{\rho}{\sin\Psi} = \frac{r}{\cos(V-\Psi)} = \frac{r\cos V}{\sin(V-\Psi)},$$

$$(2) \qquad \frac{r}{\sin(V-\Psi)} = \frac{R}{\sin V}.$$

L'égalité des deux derniers rapports (1) donne de suite la relation

$$(3) \qquad \operatorname{tang}(V-\Psi) = \cos V,$$

propre à *toute courbe de poursuite*. Or, en multipliant les membres de l'équation (2) par $\operatorname{tang}(V-\Psi)$, et comparant à (1), on trouve, en tenant compte de (3),

$$(4) \qquad \frac{r}{\cos(V-\Psi)} = R\cot V = \frac{\rho}{\sin\Psi}.$$

La relation $\frac{\rho}{\sin\Psi} = R\cot V$ est propre à la courbe de poursuite de l'énoncé : ce sera notre formule (4). Tirons alors de (1) et (2)

$$(5) \qquad \cos(V-\Psi) = r\frac{\sin\Psi}{\rho}; \qquad \sin(V-\Psi) = r\frac{\sin V}{R};$$

élevant au carré les deux membres des relations (5), nous trouverons

$$\frac{1}{r^2} = \left(\frac{\sin\Psi}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\sin V}{R}\right)^2$$

ou

$$(6) \qquad \left(\frac{\sin\Psi}{\rho}\right)^2 = \frac{1}{r^2} - \frac{\sin^2 V}{R^2},$$

ou, en tenant compte de (4) et de la relation générale,

$$(7) \qquad p = r\sin V,$$

$$(8) \qquad \frac{\operatorname{tang}^2 V}{R^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{p^2}{r^2R^2} = \frac{R^2-p^2}{r^2R^2}$$

ou

$$\operatorname{tang}^2 V = \frac{R^2-p^2}{r^2}.$$

On va obtenir l'équation différentielle demandée, en combinant la relation (8), écrite

$$(8') \qquad r^2 = (R^2 - p^2)\cot^2 V,$$

propre à la courbe de l'énoncé, et la relation générale (7) : celle-ci, en effet, nous donne

$$(9) \qquad \frac{p^2}{r^2} = \sin^2 V.$$

En multipliant membre à membre par la relation (8'), il vient

$$(10) \qquad \frac{p^2}{R^2 - p^2} = \cos^2 V.$$

Additionnant membre à membre, on obtient l'équation de la courbe en coordonnées p et r :

$$(11) \qquad \frac{1}{r^2} + \frac{1}{R^2 - p^2} = \frac{1}{p^2},$$

c'est-à-dire

$$(12) \qquad r^2 = p^2\left(1 + \frac{p^2}{R^2 - 2p^2}\right).$$

Or, en différentiant les deux membres, le premier devient $2r\,dr$; et comme, en vertu d'une formule connue,

$$\rho = \frac{r\,dr}{dp},$$

l'équation différentielle demandée est

$$(13) \qquad 2\rho\,dp = d\left[p^2\left(1 + \frac{p^2}{R^2 - 2p^2}\right)\right]$$

ou

$$(14) \qquad \frac{dp}{d\left[\dfrac{p^2(p^2 - R^2)}{2p^2 - R^2}\right]} = \frac{1}{2\rho}$$

avec $R = 1$, comme le particularise l'énoncé. Telle est la forme, *à variables séparées*, de cette équation.

Outre les formules (3), (4), (8'), (11), on trouvera, en considérant le triangle OKE, la relation $\rho = p\left(1 - \frac{\cos^2 V}{\sin V}\right)$, ou

$$\rho = r(\sin V - \cos V), \tag{15}$$

propre à la courbe, ou encore $p - \rho = \sec^2 V r$; ou

$$\rho = r\left[\left(\frac{p}{r}\right)^2 + \left(\frac{p}{r}\right) - 1\right], \tag{16}$$

et la relation $p = R\sin(V - \Psi)$, commune aux courbes de poursuite.

QUESTIONS.

2438. La surface gauche circonscrite à une sphère, qui admet pour directrices un diamètre de cette sphère et une tangente à sa section diamétrale normale à ce diamètre, touche la sphère suivant une courbe de Viviani [1].

M. D'OCAGNE.

2439. Soit O le centre du cercle circonscrit à un triangle. Si une droite enveloppe un cercle de centre O, son orthopôle par rapport au triangle enveloppe une hypocycloïde allongée ou raccourcie.

L. POLI.

---

[1] Cette propriété de la courbe de Viviani est à ajouter à celles qui ont été données par Mlle Anne de Préhyr (*N. A.*, 1914, p. 364) et démontrées par un anonyme (*N. A.*, 1915, p. 170).

[J2f]

SUR L'APPLICATION DE LA LOI DE GAUSS A LA POSITION PROBABLE D'UN POINT DANS LE PLAN OU DANS L'ESPACE (*suite*);

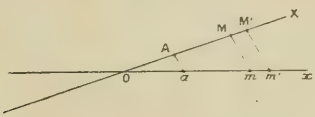
Par M. J. HAAG.

II.

12. *Invariance de la loi de Gauss dans la projection cylindrique.* — Soit d'abord une droite OX, sur laquelle le point M obéit à la loi de Gauss, avec le vecteur unitaire OA. Projetons M en m sur la droite Ox, parallèlement à une direction fixe quelconque.

Soit Oa la projection de OA. La probabilité pour

Fig. 5.



que m soit sur le segment élémentaire mm' est évidemment la même que la probabilité pour que M soit sur le segment homologue MM'. Or, cette dernière est $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{MM'}{OA}e^{-\left(\frac{OM}{OA}\right)^2}$. Comme

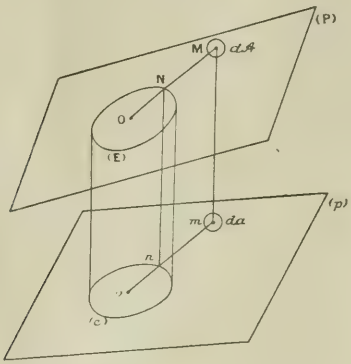
$$\frac{MM'}{OA}=\frac{mm'}{Oa} \qquad \text{et} \qquad \frac{OM}{OA}=\frac{Om}{Oa},$$

elle peut aussi s'écrire $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{mm'}{Oa}e^{-\left(\frac{Om}{Oa}\right)^2}$.

D'où il résulte que *m obéit, sur Ox, à la loi de Gauss, avec Oa pour écart unitaire.*

Soit maintenant un plan P, dans lequel le point M obéit à la loi de Gauss, avec l'ellipse unitaire (E). Pro-

Fig. 6.



jetons sur le plan (p) parallèlement à une direction fixe quelconque. La probabilité P pour que m soit dans l'aire élémentaire da est évidemment la même que la probabilité pour que M soit dans l'aire homologue $d\mathcal{A}$. Or, cette dernière est $\frac{d\mathcal{A}}{S} e^{-\left(\frac{OM}{ON}\right)^2}$, S désignant l'aire de l'ellipse (E). Mais, si s désigne l'aire de l'ellipse (e), projection de (E), on a

$$\frac{d\mathcal{A}}{S} = \frac{da}{s}, \qquad \frac{OM}{ON} = \frac{Om}{On}.$$

Donc, la probabilité P peut s'écrire $\frac{da}{s} e^{-\left(\frac{Om}{On}\right)^2}$. Autrement dit, le point m *obéit, dans le plan* (p), *à la loi de Gauss, avec* (e) *pour ellipse unitaire.*

On peut étendre, sans difficulté, les deux démonstrations précédentes à espace et même à un espace à un nombre quelconque de dimensions. La projection cylindrique devient alors une transformation affine,

c'est-à-dire une transformation homographique conservant le plan de l'infini.

13. *Ellipses de probabilité.* — Revenons à la formule (25). Elle nous montre que, pour une valeur donnée de $d\mathcal{A}$, les points d'égale probabilité se répartissent sur les ellipses (E_ω) homothétiques de l'ellipse unitaire (E). Ces ellipses sont appelées *ellipses de probabilité.*

La probabilité est plus grande en n'importe quel point intérieur à (E_ω) qu'en n'importe quel point extérieur à (E_ω), car $e^{-\omega^2}$ décroît quand ω croît. Il s'ensuit que *la probabilité* P_ω *pour que le point* M *soit à l'intérieur de l'ellipse* (E_ω) *est plus grande que la probabilité pour qu'il soit dans une aire quelconque égale à l'aire de cette ellipse.*

Calculons P_ω. On a

$$dP_\omega = \frac{1}{S} e^{-\omega^2} d\mathcal{A},$$

en désignant par $d\mathcal{A}$ l'aire comprise entre les ellipses (E_ω) et $(E_{\omega+d\omega})$. Or, l'aire de (E_ω) est $S\omega^2$. Par suite, $d\mathcal{A} = 2S\omega\, d\omega$. D'où

$$dP_\omega = e^{-\omega^2} d(\omega^2),$$

$$(69) \qquad P_\omega = \int_0^\omega e^{-\omega^2} d(\omega^2) = 1 - e^{-\omega^2}.$$

L'ellipse probable ou mieux *ellipse médiane* est celle à l'intérieur de laquelle il y a une chance sur deux pour que se trouve le point M. Elle est donnée par l'équation

$$1 - e^{-\omega^2} = \frac{1}{2},$$

dont l'unique solution est $\omega_p = 0{,}8326\ldots$. *Ce n'est pas l'ellipse décrite sur les écarts médians comme*

diamètres conjugués. D'après (6), elle lui est homothétique dans le rapport $\frac{\omega_h}{t_p} = \frac{0,8326\ldots}{0,4769\ldots} = 1,746$, soit environ $\frac{7}{4}$.

14. *Cas où l'ellipse unitaire est un cercle.* — Soit a le rayon de ce cercle. La probabilité élémentaire s'écrit

$$(70) \qquad P = \frac{1}{\pi a^2} e^{-\omega^2} d\mathcal{A} = \frac{1}{\pi} e^{-\omega^2} \omega \, d\omega \, d\varphi,$$

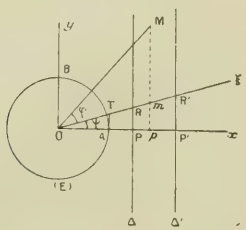
en appelant φ l'angle polaire du point M et posant toujours $\omega = \frac{OM}{a}$.

Si une aire $\mathcal{A}$ tourne autour de O, *la probabilité à l'intérieur de cette aire demeure constante.*

Probabilité dans une bande rectiligne indéfinie. — Soit la bande comprise entre les droites parallèles Δ et Δ' (*fig.* 7).

Prenons les deux axes Ox et Oy respectivement

Fig. 7.



perpendiculaire et parallèle à Δ. Pour que M soit dans la bande considérée, il faut et il suffit que son abscisse soit comprise entre les abscisses α et α' de P et P'. Si l'on remplace le cercle (E) par les vecteurs unitaires (OA) et (OB), on voit que la probabilité pour

qu'il en soit ainsi est

$$(71) \qquad P = \frac{1}{2}\left[\Theta\left(\frac{\alpha'}{a}\right) - \Theta\left(\frac{\alpha}{a}\right)\right] \qquad (\alpha < \alpha'),$$

ou encore

$$(72) \qquad P = \frac{1}{2}[\Theta(\omega') \pm \Theta(\omega)],$$

ω et ω' désignant les indices des cercles de probabilité tangents à Δ et Δ'; on doit prendre le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que les deux droites sont ou ne sont pas de part et d'autre du point O; de plus, dans la seconde hypothèse, on doit prendre $\omega < \omega'$. Dans le cas où les deux droites sont symétriques par rapport à O, on a $P = \Theta(\omega)$.

Probabilité de la projection sur une droite quelconque. — Soit la droite $O\xi$, définie par l'angle polaire ψ. Soit m la projection de M sur cette droite, parallèlement à Oy. *Quelle est la probabilité pour que m se trouve sur le segment* RR'?

Cette probabilité est évidemment la même que tout à l'heure. Elle est donnée par (71). Si ξ et ξ' sont les abscisses de R et R' sur $O\xi$, on a

$$\alpha = \xi \cos\psi, \qquad \alpha' = \xi' \cos\psi;$$

d'où

$$(73) \qquad P = \frac{1}{2}\left[\Theta\left(\frac{\xi'}{u}\right) - \Theta\left(\frac{\xi}{u}\right)\right]$$

en posant

$$(74) \qquad u = \frac{a}{\cos\psi} = OT.$$

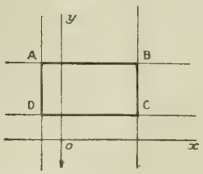
Le point m obéit donc, sur $O\xi$, *à la loi de Gauss*, l'écart unitaire étant donnée par (74). Ceci résulte d'ailleurs aussi du n° 12, si l'on considère m comme la projection de p sur $O\xi$.

Probabilité dans un rectangle. — Soit le rectangle ABCD (*fig.* 8) dont les côtés ont pour équations :

$$x = \alpha, \qquad x = \alpha', \qquad y = \beta, \qquad y = \beta'.$$

Pour que le point M soit dans le rectangle, il faut et il suffit qu'il se trouve à la fois dans les deux bandes

Fig. 8.



formées par ses deux côtés indéfiniment prolongés. Or, les probabilités correspondant à chacune de ces deux conditions étant indépendantes, la probabilité cherchée est égale à leur produit, soit

$$(75) \qquad P = \frac{1}{4}\left[\theta\left(\frac{\alpha'}{a}\right) - \theta\left(\frac{\alpha}{a}\right)\right]\left[\theta\left(\frac{\beta'}{\alpha}\right) - \theta\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\right]$$

ou

$$(76) \qquad P = \frac{1}{4}\left[\theta(\omega') \pm \theta(\omega)\right]\left[\theta(\omega'_1) \pm \theta(\omega_1)\right],$$

ω, ω', ω_1, ω'_1 désignant les indices des cercles de probabilité tangents aux côtés du rectangle.

Probabilité dans un secteur circulaire, dans un angle, de sommet O. — Soit un secteur circulaire de rayon ωa et d'angle au centre φ. La probabilité dans ce secteur est évidemment proportionnelle à φ; elle est donc égale à

$$(77) \qquad P = \frac{\varphi}{2\pi} P_\omega = \frac{\varphi}{2\pi}\left(1 - e^{-\omega^2}\right).$$

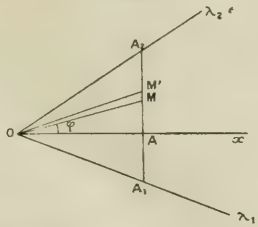
Si ω augmente indéfiniment, on a la probabilité dans

un angle de sommet O :

(78) $$P = \frac{\varphi}{2\pi}.$$

15. *Probabilité dans un triangle de sommet* O, *dans un olygone quelconque.* — Soit le triangle

Fig. 9.



OA_1A_2 (*fig.* 9), défini par

$$OA = \alpha, \qquad (\widehat{Ox, OA_1}) = \varphi_1, \qquad (\widehat{Ox, OA_2}) = \varphi_2.$$

La probabilité, dans le triangle élémentaire OMM', d'angle au sommet $d\varphi$, est (n° 14)

$$dP = \frac{d\varphi}{2\pi}\left(1 - e^{-\frac{\overline{OM}^2}{a^2}}\right).$$

Or, on a

$$OM = \frac{\alpha}{\cos\varphi};$$

d'où

$$dP = \left(1 - e^{-\frac{K^2}{\cos^2\varphi}}\right)\frac{d\varphi}{2\pi}$$

en posant

(79) $$K = \frac{\alpha}{a} = \text{indice du cercle tangent à } A_1A_2.$$

La probabilité cherchée est donc

(80) $$P = \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left(1 - e^{-\frac{K^2}{\cos^2\varphi}}\right)d\varphi$$
$$= \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{1}^{\varphi_2} e^{-\frac{K^2}{\cos^2\varphi}}\,d\varphi.$$

Posons

$$(81) \qquad \Theta_1(k, \varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\varphi} e^{-\frac{k^2}{\cos^2\varphi}}\, d\varphi.$$

La formule (80) devient

$$(82) \qquad P = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2\pi} - [\Theta_1(k, \varphi_2) - \Theta_1(k, \varphi_1)].$$

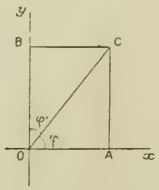
On voit que, si l'on possède une table à double entrée de la fonction $\Theta_1(k, \varphi)$, on pourra calculer la probabilité dans tout triangle de sommet O et, par suite, dans toute aire limitée par des droites, puisqu'une telle aire peut toujours être considérée comme une somme algébrique de triangles admettant O pour sommet.

16. Signalons *quelques propriétés de la fonction* $\Theta_1(k, \varphi)$.

D'abord, c'est une fonction paire de k et impaire de φ.

Considérons maintenant le rectangle OACB (*fig.* 10)

Fig. 10.



comme somme des deux triangles OAC et OBC. On a [formule (75)]

$$(83) \qquad P_{OACB} = \frac{1}{4}\,\Theta(k)\,\Theta(k'),$$

avec

$$k = \frac{OA}{a}, \qquad k' = \frac{OB}{a} = k \operatorname{tang}\varphi.$$

D'autre part, d'après (82),

$$P_{OAC} = \frac{\varphi}{2\pi} - \Theta_1(k, \varphi), \qquad P_{OBC} = \frac{\varphi'}{2\pi} - \Theta_1(k', \varphi').$$

En ajoutant ces deux probabilités, on doit obtenir (83). On a donc, en observant que $\varphi + \varphi' = \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{1}{4}\Theta(k)\Theta(k') = \frac{1}{4} - \Theta_1(k, \varphi) - \Theta_1(k', \varphi')$$

ou

$$(84)\quad \Theta_1(k, \varphi) + \Theta_1\left(k \operatorname{tang}\varphi, \frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{1}{4}[1 - \Theta(k)\Theta(k \operatorname{tang}\varphi)].$$

Grâce à cette identité, il suffit de calculer les valeurs de la fonction Θ_1 pour $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$ et pour toutes les valeurs de k; en se servant de la table de la fonction Θ, on en déduira les valeurs de Θ_1 pour $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Dans (84), faisons $\varphi = \frac{\pi}{2}$; il vient

$$(85)\qquad \Theta_1\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}[1 - \Theta(k)].$$

Faisons, de même, $\varphi = \frac{\pi}{4}$; il vient

$$(86)\qquad \Theta_1\left(k, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{8}[1 - \Theta^2(k)].$$

Appliquons à l'intégrale (81) la formule de la moyenne :

$$\Theta_1(k, \varphi) = \frac{\varphi}{2\pi} e^{-\frac{k^2}{\cos^2\varphi_0}},$$

φ_0 étant un certain angle compris entre 0 et φ. On a évidemment l'inégalité

$$(87)\qquad \Theta_1(k, \varphi) < \frac{\varphi}{2\pi} e^{-k^2}.$$

qui montre que la fonction Θ_1 tend rapidement vers zéro, quand k augmente.

Il est commode d'introduire, en même temps que la fonction $\Theta_1(k, \varphi)$, la suivante :

$$(88) \qquad \Theta_2(k, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\varphi} e^{-\frac{k^2}{\sin^2\varphi}} d\varphi;$$

elle est liée à la première par la relation

$$(89) \qquad \Theta_2(k, \varphi) \equiv \Theta_1\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - \Theta_1\left(k, \frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

ou

$$(90) \qquad \Theta_1(k, \varphi) \equiv \Theta_2\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - \Theta_2\left(k, \frac{\pi}{2} - \varphi\right).$$

L'identité (84) devient, en tenant compte de (90) et de (85) et remarquant que $\Theta_2\left(k, \frac{\pi}{2}\right) = \Theta_1\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$(91) \qquad \Theta_2\left(k, \frac{\pi}{2} - \varphi\right) + \Theta_2(k \operatorname{tang}\varphi, \varphi)$$
$$\equiv \frac{1}{4}[1 - \Theta(k)][1 - \Theta(k \operatorname{tang}\varphi)].$$

En y faisant $\varphi = 0$, on retrouve (85). En y faisant $\varphi = \frac{\pi}{4}$, on obtient

$$(92) \qquad \Theta_2\left(k, \frac{\pi}{4}\right) \equiv \frac{1}{8}[1 - \Theta(k)]^2 \equiv 2\left[\Theta_2\left(k, \frac{\pi}{2}\right)\right]^2.$$

Si l'on applique la formule de la moyenne à l'intégrale (88), on a

$$(93) \qquad \Theta_2(k, \varphi) = \frac{\varphi}{2\pi} e^{-\frac{k^2}{\sin^2\varphi_0}},$$

ce qui entraîne l'inégalité

$$(94) \qquad \Theta_2(k, \varphi) < \frac{\varphi}{2\pi} e^{-\frac{k^2}{\sin^2\varphi}},$$

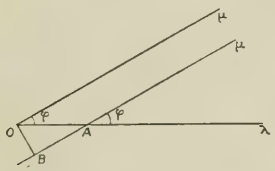
laquelle montre que la fonction Θ_2 tend rapidement vers zéro quand k augmente ou quand φ diminue.

Ces diverses considérations facilitent le calcul des tables des fonctions Θ_1 et Θ_2, qui sont reproduites à la fin de cet article.

17. *Probabilité dans un angle.* — Tout angle peut être considéré comme la somme ou la différence de deux angles dont un côté passe par O. Bornons-nous, en conséquence, à considérer le cas d'un angle jouissant de cette particularité.

Premier cas. — O *se trouve sur le prolongement d'un côté de l'angle.* — Soit l'angle $\lambda A \mu = \varphi$.

Fig. 11.



Menons $O\mu$ parallèle à $A\mu$. La probabilité cherchée P est égale à $P_{\lambda O \mu} - P_{\mu O A} = \frac{\varphi}{2\pi} - P_{\mu O A}$.

Or μOA est un triangle. En lui appliquant la formule (82), pour $\varphi_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi$ et $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$, on a

$$P_{\mu O A} = \frac{\varphi}{2\pi} - \left[\Theta_1\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - \Theta_1\left(k, \frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right] = \frac{\varphi}{2\pi} - \Theta_2(k, \varphi),$$

avec

$$(95)\quad k = \frac{OB}{a} = \frac{OA \sin\varphi}{a} = \frac{\alpha \sin\varphi}{a}$$

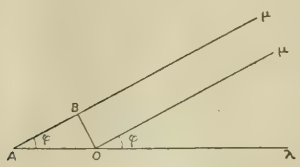
= indice du cercle tangent à $A\mu$ (on a posé $OA = \alpha$).

Finalement, on a

$$P = \Theta_2(k, \varphi). \tag{96}$$

Deuxième cas. — O *se trouve sur un côté de*

Fig. 12.



l'angle (*fig.* 12). — On a, cette fois,

$$P = \frac{\varphi}{2\pi} + P_{\mu OA}.$$

Or, $P_{\mu OA}$ est obtenu en faisant, dans (82),

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2}, \qquad \varphi_1 = -\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \varphi - \frac{\pi}{2}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} P &= \frac{\varphi}{2\pi} + \frac{1}{2} - \frac{\varphi}{2\pi} - \left[\Theta_1\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - \Theta_1\left(k, \varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2} - \Theta_1\left(k, \frac{\pi}{2}\right) - \Theta_1\left(k, \frac{\pi}{2} - \varphi\right) \\ &= \frac{1}{2} - 2\Theta_1\left(k, \frac{\pi}{2}\right) + \Theta_2(k, \varphi), \end{aligned}$$

ou

$$P = \Theta_2(k, \varphi) + \frac{1}{2}\,\Theta(k), \tag{97}$$

k étant toujours donné par (95).

Cas où le sommet de l'angle est très éloigné du point O. — On sait que

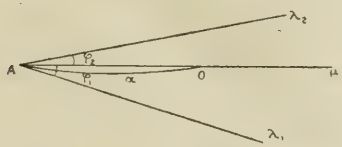
$$\Theta_2(k, \varphi) < \frac{\varphi}{2\pi}\, e^{\frac{k^2}{\sin^2\varphi}} = \frac{\varphi}{2\pi}\, e^{-\frac{\alpha^2}{a^2}}. \tag{98}$$

Si la distance OA est très grande par rapport à l'écart unitaire, $\frac{\alpha}{a}$ est très grand et $\Theta_2(k, \varphi)$ peut être regardé comme pratiquement nul. Donc, dans cette hypothèse, *la probabilité est nulle si* O *est extérieur à l'angle; si* O *est sur un côté de l'angle, elle est donnée par la formule*

$$(99) \qquad P = \frac{1}{2}\,\Theta\left(\frac{\alpha \sin\varphi}{a}\right) = \frac{1}{2}\,\left(\frac{OB}{a}\right).$$

Dans le cas général de la figure 13, on a, en appe-

Fig. 13.



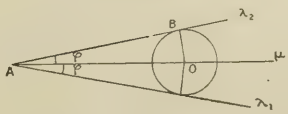
lant φ_1 et φ_2 les angles polaires, par rapport à $AO\mu$, des demi-droites $A\lambda_1$ et $A\lambda_2$,

$$(100) \qquad P = \frac{1}{2}\left[\Theta\left(\frac{\alpha \sin\varphi_2}{a}\right) - \Theta\left(\frac{\alpha \sin\varphi_1}{a}\right)\right].$$

En particulier, si $\varphi_2 = -\varphi_1 = \varphi > 0$ (*fig.* 14), on a

$$(101) \qquad P = \Theta\left(\frac{\alpha \sin\varphi}{a}\right) = \Theta\left(\frac{OB}{a}\right).$$

Fig. 14.



En particulier, $P = \frac{1}{2}$, si $OB = 0,4769 \times a$. Donc, *l'angle médian ou écart angulaire probable est*

l'angle circonscrit au cercle de centre O *et de rayon égal au vecteur écart probable.*

18. *Cas général ou l'ellipse unitaire n'est pas un cercle.* — Il se ramène immédiatement, au cas particulier envisagé précédemment, par l'application des propriétés d'invariance du n° 12.

Supposons, en effet, que M obéisse, dans le plan (P), à la loi de Gauss, avec l'ellipse unitaire (E). Cette ellipse peut être considérée comme projection orthogonale d'un cercle (E'), situé dans un certain plan (P'), où le point M a pour homologue M'. Nous savons que M' obéit, dans (P'), à la loi de Gauss, l'ellipse unitaire étant précisément le cercle (E').

Dès lors, pour avoir la probabilité de M dans une aire ($\mathcal{A}$) de (P), il suffit de calculer la probabilité de M' dans l'aire homologue ($\mathcal{A}'$) de (P') et *l'on est bien ramené au cas où l'ellipse unitaire est un cercle.*

Voyons ce que deviennent, dans le cas général, les résultats obtenus aux numéros 14 à 17.

Nous appellerons *anomalie d'un angle* $(\widehat{O\lambda, O\mu})$ du plan (P) la mesure algébrique $\varphi = (\widehat{O'\lambda', O'\mu'})$ de l'angle homologue du plan (P'). On sait que c'est la différence des angles d'anomalie excentrique des points, de l'ellipse (E) situés sur les demi-droites $O\mu$, $O\lambda$.

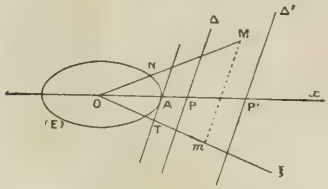
Cela posé, la formule (70) subsiste, à condition d'appeler φ l'anomalie de l'angle $(\widehat{Ox, OM})$ et ω le rapport $\frac{OM}{ON}$.

Il en est de même de la formule (72), ω et ω' désignant les indices des ellipses de probabilité tangentes à Δ et Δ', soient $\omega = \frac{OP}{OA}$, $\omega' = \frac{OP'}{OA}$ (*fig.* 15).

La projection m sur $O\xi$ obéit toujours à la loi de Gauss, avec l'écart unitaire OT, comme il résulte d'ailleurs aussi du n° 12.

La formule (76) donne la *probabilité, dans un*

Fig. 15.



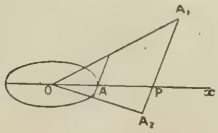
parallélogramme dont les côtés ont des directions conjuguées par rapport à (E).

Les formules (77) et (78) donnent les probabilités dans un secteur elliptique et dans un angle de sommet O, en fonction de l'anomalie φ. On en déduit des propriétés d'invariance évidentes, déjà signalées par le capitaine Vallier, dans l'article précité.

[Toutes les propriétés d'invariance signalées par cet auteur sont, du reste, évidentes par projection du cercle (E').]

La probabilité dans un triangle OA_1A_2 *de sommet* O (*fig.* 16) est toujours donnée par la for-

Fig. 16.

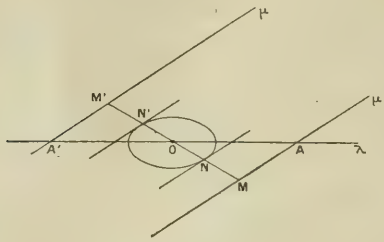


mule (82). La lettre k désigne l'indice de l'ellipse de probabilité tangente à A_1A_2, soit $k = \frac{OP}{OA}$. Quant

à φ_1 et φ_2, ce sont les anomalies des angles $(\widehat{Ox, OA_1})$, $(\widehat{Ox, OA_2})$.

La probabilité dans l'angle $\lambda A \mu$ (*fig.* 17) est

Fig. 17.



donnée par (96), k désignant l'indice de l'ellipse de probabilité tangente à $A\mu$, soit $k = \frac{OM}{ON}$, et φ désignant l'anomalie de cet angle.

La probabilité dans l'angle $\lambda A' \mu$ est, de même, donnée par (97). Si A' est très éloigné de O, on a

$$P = \frac{1}{2}\,\Theta\left(\frac{OM'}{ON'}\right). \tag{102}$$

L'écart angulaire probable est, dans cette hypothèse, l'angle circonscrit à l'ellipse décrite sur les écarts probables comme diamètres conjugués.

19. *Ellipsoïdes de probabilité.* — D'après la formule (32), les points d'égale probabilité, pour une valeur donnée de dV, se répartissent sur les ellipsoïdes (E_ω) homothétiques de l'ellipsoïde unitaire (E). Ces ellipsoïdes sont appelés *ellipsoïdes de probabilité.*

Comme au n° 13, on peut démontrer que *la probabilité est plus grande dans* (E_ω) *que dans n'importe quel volume équivalent.*

On a

$$dP_\omega = \frac{4}{3\sqrt{\pi}\,W} e^{-\omega^2} d(W\omega^3) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-\omega^2}\omega^2 d\omega;$$

d'où

$$P_\omega = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\omega e^{-\omega^2}\omega^2 d\omega = \Theta(\omega) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\omega e^{-\omega^2}.$$

L'ellipsoïde probable ou *médian* est donné par l'équation

$$\Theta(\omega) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\omega e^{-\omega^2} = \frac{1}{2},$$

dont l'unique racine est approximativement égale à 1,076.

Il est homothétique à l'ellipsoïde décrit sur les écarts médians comme diamètres conjugués, dans le rapport $\frac{1,076}{0,4769} = 2,25\ldots$, soit environ $\frac{9}{4}$.

On pourrait essayer d'étendre à l'espace les considérations développées aux n°s 14 à 18.

Contentons-nous de citer les propriétés suivantes :

La probabilité dans la *bande comprise entre deux plans parallèles* est donnée par la formule (72), ω et ω' désignant les indices des ellipsoïdes de probabilité tangents aux deux plans.

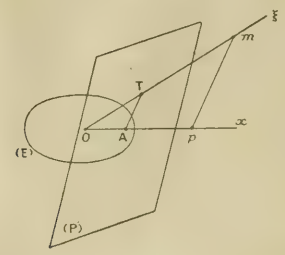
La probabilité dans un *prisme indéfini dont les faces sont parallèles à deux plans diamétraux conjugués* est, de même, donnée par (76).

La probabilité dans un *parallélépipède dont les faces sont parallèles à trois plans diamétraux conjugués* est donnée par une formule analogue, comprenant un facteur de plus et le coefficient $\frac{1}{8}$ au lieu de $\frac{1}{4}$.

La projection m de M *sur* Oξ *parallèlement à un plan* (P) *quelconque obéit à la loi de Gauss, avec le*

vecteur unitaire OT, T désignant l'intersection de Oξ avec le plan (P) (*fig.* 18) supposé tangent à (E). Cela

Fig. 18.



résulte du n° 12, appliqué à m et à la projection p de M sur le diamètre Ox, conjugué de (P).

La projection m de M *sur un plan* (P) *parallèlement à une droite quelconque* Oλ *obéit à la loi de Gauss, avec une ellipse unitaire qui est l'intersection de* (P) *avec le cylindre circonscrit à* (E) *parallèlement à* Oλ. Cela résulte du n° 12, appliqué à m et à la projection p de M sur le plan diamétral (Q) conjugué de Oλ.

(*A suivre.*)

[M²3aα]

SUR UNE PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DES CYLINDRES ET DU CYLINDROÏDE;

PAR M. R. HARMEGNIES.

On sait que les cylindres et le cylindroïde (ou conoïde de Plücker) sont tels que le lieu des projections d'un point quelconque de l'espace sur leurs génératrices

est une courbe plane. Je me propose d'établir *géométriquement* que ce sont les seules surfaces réglées jouissant de cette propriété. Ce théorème a été établi analytiquement par M. Appell [1].

Considérons en effet deux génératrices quelconques G_1 et G_2 d'une telle surface et leur perpendiculaire commune P_1P_2. Projetons un point P quelconque de P_1P_2 en P_3P_4, sur deux autres génératrices G_3, G_4 également quelconques. Dans le cas du cylindroïde, P_3P_4 et P_1P_2 sont confondues avec l'axe de la surface; éliminons ce cas, et supposons que P_1P_2, P_3P_4 déterminent un plan. Dans le cas du cylindre, ce plan est indépendant du point P choisi sur P_1P_2; éliminons encore ce cas, et supposons que ce plan tourne autour de P_1P_2 quand P décrit cette droite. Soit Q le point de rencontre de P_1P_2 et P_3P_4; on voit facilement que P et Q se correspondent homographiquement sur P_1P_2. Un point double M de cette homographie sera tel que la droite MP_3P_4 correspondante soit perpendiculaire commune à G_3 et G_4. Si l'homographie a deux points doubles distincts, M et M', la perpendiculaire commune à G_3 et G_4, passant par M et M', ne peut être que MM' ou P_1P_2: on retrouve le cas du conoïde, à moins que G_3 et G_4 n'admettent plusieurs perpendiculaires communes; elles sont alors parallèles et l'on retrouve le cas des cylindres.

Si les deux points doubles sont confondus (étant bien entendu qu'il en est ainsi quelles que soient les génératrices choisies), on voit que les perpendiculaires communes à deux génératrices quelconques se rencontrent. Supposons que G_4 se confonde avec G_1: les

---

[1] *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXVIII, p. 261.

perpendiculaires communes à G_1, G_2, G_3 prises deux à deux forment un triangle $P_1P_2P_3$, et chaque génératrice étant perpendiculaire au plan de ce triangle, on retrouve encore le cas des cylindres. *Une surface jouissant de la propriété indiquée ne peut donc être qu'un cylindre ou un conoïde droit.*

Dans ce dernier cas, si l'on projette sur un plan perpendiculaire à l'axe du conoïde, on voit que la projection de la courbe plane, lieu des projections d'un point A sur les génératrices, est le cercle qui admet pour extrémités d'un même diamètre la projection de l'axe et la projection de A. Cette courbe est donc une conique, et le conoïde admet comme courbes directrices: 1° une génératrice d'un cylindre de révolution; 2° la droite à l'infini du plan perpendiculaire; 3° une section plane du cylindre. C'est bien la définition du cylindroïde.

[O'5h]

SUR LA SURFACE DONT TOUS LES POINTS SONT DES OMBILICS ;

PAR M. R. HARMEGNIES.

Je me propose d'établir *géométriquement* que cette surface (Σ) est une sphère. En effet, toute ligne tracée sur (Σ) en est une ligne de courbure; il en est de même sur une sphère quelconque, et le théorème de Joachimstal montre que les plans tangents à (Σ) et à une sphère quelconque en tous les points de leur intersection forment un angle constant. Considérons trois sphères de centres O_1, O_2, O_3, passant par deux points quel-

conques A et B de (Σ), et les normales AN, BN′ à (Σ) en ces points. L'égalité des angles O_1AN et O_1BN', O_2AN et O_2BN', O_3AN et O_3BN' montre que AN et BN′ se coupent en un point ω du plan $O_1O_2O_3$, tel par conséquent que l'on ait $\omega A = \omega B$. A et B étant deux points quelconques de (Σ), on voit bien que cette surface est une sphère. Dans un cas limite, si AN et BN′ sont parallèles au plan $O_1O_2O_3$, on obtient évidemment un plan. On pourrait d'ailleurs démontrer aussi le théorème en coupant par des plans qui passent en A et B.

[O'3b]

COURBES GAUCHES LIÉES PAR ÉCHANGE DES DIRECTIONS DES TANGENTES ET DES BINORMALES. LES FORMULES DE FRENET SONT INTUITIVES ;

PAR M. G. FONTENÉ.

I.

1. THÉORÈME. — *Si deux courbes* (A) *et* (A′) *sont telles que les tangentes de la seconde sont parallèles aux binormales de la première, en sorte que les tangentes de la première sont parallèles aux binormales de la seconde, les normales principales des deux courbes, étant parallèles, peuvent présenter deux dispositions.*

1° *Ces normales principales* N *et* N′, *prises chacune vers la concavité de la courbe correspondante, peuvent être de sens contraires* (*fig.* 1). *Les courbes sont alors toutes deux dextrorsum ou toutes deux*

senestrorsum, et l'on a

$$\frac{R}{T} \times \frac{R'}{T'} = +1,$$

T *et* T' *ayant des signes. — En outre, si* AA_1 *et* $A'A'_1$ *sont deux petits arcs correspondants, l'arc* AA_2 *déduit par translation de l'arc* $A'A'_1$, *et qui est normal en* A *au plan osculateur* TAN, *se trouve du même côté que l'arc* AA_1 *par rapport à ce plan osculateur, et de même l'arc* $A'A'_2$ *déduit par translation de l'arc* AA_1, ... Sur la figure, les plans osculateurs TAN et T'A'N' sont supposés opaques.

2° *Si les normales principales* N *et* N' *sont de même sens, l'une des courbes est dextrorsum, l'autre est senestrorsum, et l'on a*

$$\frac{R}{T} \times \frac{R'}{T'} = -1.$$

En outre, l'arc AA_2 *et l'arc* AA_1 *sont de part et d'autre du plan osculateur en* A, ...

Le second cas peut se déduire du premier en remplaçant l'une des courbes par sa symétrique prise par rapport à un point.

Si l'on donnait des signes à R et à R' d'après le sens relatif des deux rayons de courbure, on aurait toujours

$$\frac{R}{T} \times \frac{R'}{T'} = -1.$$

2. Si l'on donne les directions des tangentes à une courbe (A) en donnant le cône dont les génératrices sont parallèles à ces tangentes, on donne en même temps les directions des plans osculateurs qui sont celles des plans tangents au cône. En déplaçant un

plan de manière qu'il reste parallèle à un plan tangent au cône, on obtient une surface développable dont l'arête de rebroussement est une courbe (A) ayant ses tangentes parallèles aux génératrices du cône; la courbe (A) dépend d'une fonction arbitraire d'une variable, cette fonction déterminant par exemple l'abscisse du point où le plan osculateur rencontre une droite fixe.

La réciprocité des deux courbes (A) et (A′) se confond avec le théorème des cônes supplémentaires.

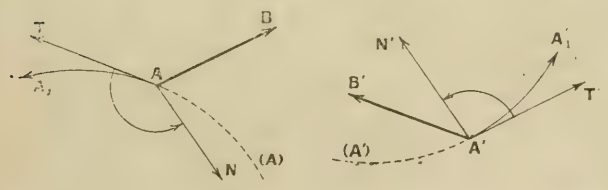
Si on laisse d'abord de côté les questions de sens, l'angle de torsion en A est égal à l'angle de contingence en A′, et inversement, les arcs élémentaires se correspondant; on a donc pour les rayons de courbure et de torsion

$$\frac{R}{T} \times \frac{R'}{T'} = 1.$$

3. La figure 1 se rapporte au cas où N et N′ sont de sens contraires, mais nous ferons un raisonnement général.

Le sens de parcours étant pris à volonté sur la courbe (A), le sens de parcours sur la courbe (A′) est déterminé, et l'on prend les tangentes T et T′ dans les sens

Fig. 1.

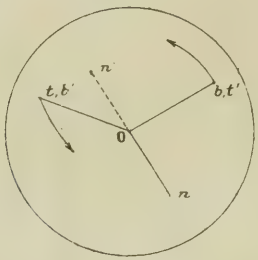


de parcours; la binormale B est toujours prise dans le sens T′, la binormale B′ dans le sens T. Des deux trièdres de Frenet (T, N, B) et (T′, N′, B′), le premier est de sens contraire à (B, N, T); *ils sont donc de*

même sens ou de sens contraires, selon que N *et* N' *sont de sens contraires ou de même sens.* On devra considérer un trièdre Ox, Oy, Oz de même sens que (T, N, B) pour la courbe (A), un trièdre ($O'x'$, $O'y'$, $O'z'$) de même sens que (T', N', B') pour la courbe (A'), ces deux trièdres pouvant être de même sens ou de sens contraires.

4. Je rappelle d'abord les conventions relatives à l'indicatrice sphérique pour une courbe (A). Le sens positif étant choisi sur la courbe, on mène, dans une sphère de centre O et de rayon *un*, le rayon Ot parallèle à AT. Le point A se déplaçant sur (A) dans le sens

Fig. 2.



positif, le point t décrit une courbe (t) sur laquelle on prend comme sens positif le sens de parcours; le rayon On, parallèle à la demi-tangente positive, est parallèle à la demi-normale principale AN dirigée vers la concavité de la courbe. La binormale AB étant dirigée de façon que le trièdre (T, N, B) soit de même sens qu'un trièdre donné Ox, Oy, Oz, on mène le rayon Ob parallèle à AB.

Le plan tangent au cône (t) étant le plan tOn, le cône (b) est le cône supplémentaire du cône (t); inversement, le cône (t) est le cône supplémentaire du

cône (b), et le plan tangent au cône (b) est le plan bOn. La tangente en b à la courbe (b) qui est le lieu du point b est donc (la question de sens étant réservée) parallèle à On. On peut le voir en considérant l'axe instantané de rotation du trièdre (t, n, b) : la tangente en t à la courbe (t) étant parallèle à On, donc perpendiculaire au plan tOb, cet axe instantané est dans ce plan : donc le point b de ce même plan décrit une courbe (b) normale en b à ce plan et la tangente en b est parallèle à On. *Selon que cet axe instantané ne passe pas ou passe entre* Ot *et* Ob, *la demi-tangente à la courbe* (b) *prise dans le sens du parcours est de même sens que* On *ou de sens contraire.* Pour les formules de Frenet, on prend comme *sens positif* sur la courbe (b) un sens tel que la demi-tangente positive soit dans le sens On; selon que le *sens de parcours* sur la courbe (b) est le sens On ou le sens contraire, on obtient pour le rayon de torsion $T = \frac{ds}{d\omega}$ une valeur positive ou négative : cette valeur est négative sur la figure 2.

5. Revenons aux deux courbes (A) et (A'). Les points b se confondent avec les points t', mais les sens positifs sur les courbes (b) et (t') formées des mêmes points sont contraires ou identiques, selon que On et On' sont de sens contraires ou de même sens. Si l'on désigne par $d\sigma$ la différentielle de l'arc de l'indicatrice (t), par $d\omega$ celle de l'arc de la courbe (b), le sens positif étant On, on a

$$R = \frac{ds}{d\sigma}, \qquad T = \frac{ds}{d\omega};$$

on a de même

$$R' = \frac{ds'}{d\sigma'}, \qquad T' = \frac{ds'}{d\omega'};$$

et l'on a

$$d\omega = -d\sigma', \qquad d\omega' = -d\sigma,$$

ou

$$d\omega = d\sigma', \qquad d\omega' = d\sigma,$$

selon que N et N′ vont de sens contraires ou de même sens.

On a d'abord dans un cas comme dans l'autre, relativement aux trièdres (T, N. B) et (T′, N′, B′),

$$\frac{R}{T} \times \frac{R'}{T'} = \frac{d\omega\, d\omega'}{d\sigma\, d\sigma'} = +1;$$

mais, dans le second cas, les deux trièdres sont de sens contraires, et alors le même signe pour T et T′ indique que l'une des courbes est dextrorsum, tandis que l'autre est senestrorsum.

En second lieu, on ne doit pas seulement considérer le signe du produit $T \times T'$, il faut tenir compte des signes des deux facteurs. Dans le premier cas, $d\omega$ par exemple étant négatif, T *est négatif;* alors, comme on sait, la courbe (A) traverse le plan osculateur en A en prenant un Z positif du côté de la demi-tangente positive Ax, les axes de coordonnées Ox, Oy, Oz étant AT, AN, AB. La formule générale

$$\frac{1}{R^2 T} = -\begin{vmatrix} \frac{dx}{ds}, & \ldots, & \ldots, \\ \frac{d^2x}{ds^2}, & \ldots, & \ldots, \\ \frac{d^3x}{ds^3}, & \ldots, & \ldots, \end{vmatrix}$$

se réduit en effet à

$$\frac{1}{R^2 T} = -1 \times 1 \times \frac{d^3 z}{ds^3},$$

et $T < 0$ correspond à $\frac{d^3 z}{ds^3} > 0$; comme $\frac{dz}{ds}$ et $\frac{d^2 z}{ds^2}$ sont nuls, z croît d'abord avec s. On se rend d'ailleurs

compte sur la figure que le déplacement du point b dans le sens On' entraîne un déplacement du point A du côté du plan osculateur TAN où se trouve AB. — L'axe AB étant de même sens que A'T', le fait annoncé au début est exact.

Dans le second cas, $d\omega$ est positif....

II.

6. Je profite de l'occasion pour présenter d'une manière simple les formules de Frenet, où la tangente et la binormale jouent des rôles comparables. Si (a, b, c), (λ, μ, ν), (α, β, γ) sont les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale, de la binormale pour la courbe (A), le trièdre Ox, Oy, Oz étant disposé comme le trièdre T, N, B, si l'on a placé le centre de la sphère de rayon un à l'origine des coordonnées, les coordonnées du point t sont a, b, c, celles du point b sont α, β, γ, et le fait que les tangentes en t et b aux courbes (t) et (b) sont parallèles à On, le sens positif étant On, donne les formules

$$(1) \qquad \frac{da}{d\sigma} = \lambda, \quad \ldots \qquad \text{ou} \qquad \frac{da}{ds} = \frac{\lambda}{R}, \quad \ldots,$$

$$(2) \qquad \frac{d\alpha}{d\omega} = \lambda, \quad \ldots \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\lambda}{T}, \quad \ldots;$$

d'où

$$\frac{d\alpha}{da} = \frac{d\beta}{db} = \frac{d\gamma}{dc} = \frac{d\omega}{d\sigma} = \frac{R}{T}.$$

On a encore, pour la tangente à la courbe qui est le lieu du point n,

$$(3) \qquad \begin{cases} d\lambda = -a\,d\sigma - \alpha\,d\omega, \quad \ldots \\ \text{ou} \\ \dfrac{d\lambda}{ds} = -\dfrac{\alpha}{R} - \dfrac{\alpha}{T}, \quad \ldots; \end{cases}$$

ces formules sont données par le théorème des projections. *Les formules de Frenet sont donc intuitives géométriquement.*

CORRESPONDANCE.

M. **Fontené.** — Mannheim a montré (*Comptes rendus*, 1897, 2e volume, p. 849) que, si les mêmes droites sont à la fois les normales principales d'une courbe gauche (A) et les binormales d'une autre courbe gauche (B), on a pour la courbe (A)

$$\frac{1}{R^2} - \frac{1}{T^2} = \frac{1}{AR};$$

si MC est le rayon de courbure en M, si MC′ est le rayon de torsion porté sur la binormale, en traçant CC′ et en menant MH perpendiculaire à CC′, la projection de MH sur MC a une longueur constante A.

Il y aurait lieu de donner également l'équation intrinsèque vérifiée par les courbes (B).

Note. — Il est aisé de répondre à la question posée par M. Fontené, en employant le calcul vectoriel.

Soit MBTN le trièdre principal d'une courbe C, en un point M; soit P un point de la binormale MB, décrivant une courbe dont cette binormale est la normale principale. La longueur MP est évidemment une constante a.

En employant les notations de MM. Burali-Forti et Marcolongo (1), on doit avoir

$$\frac{dP}{ds} \wedge \frac{d^2P}{ds^2} \wedge \mathbf{b} = 0.$$

---

(1) *Éléments de calcul vectoriel*, traduction Lattès, p. 86.

Or on a

$$P = M + a\mathbf{b},$$

d'où en dérivant et en appliquant les formules de Frenet,

$$\frac{dP}{ds} = \frac{dM}{ds} + a\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \mathbf{t} + a\frac{\mathbf{n}}{T},$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2P}{ds^2} &= \frac{d\mathbf{t}}{ds} + \frac{a}{T}\frac{d\mathbf{n}}{ds} - \frac{aT'}{T^2}\mathbf{n}\\ &= \frac{\mathbf{n}}{R} - \frac{a}{T}\left(\frac{1}{R}\mathbf{t} + \frac{1}{T}\mathbf{b}\right) - \frac{aT'}{T^2}\mathbf{n}\\ &= \frac{-a}{RT}\mathbf{t} + \left(\frac{1}{R} - \frac{aT'}{T^2}\right)\mathbf{n} - \frac{a}{T^2}\mathbf{b}.\end{aligned}$$

On a ensuite

$$\frac{d^2P}{ds^2} \wedge \mathbf{b} = \frac{a}{RT}\mathbf{n} + \left(\frac{1}{R} - \frac{aT'}{T^2}\right)\mathbf{t}.$$

$$\frac{dP}{ds} \times \frac{d^2P}{ds^2} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{R} - \frac{aT'}{T^2} + \frac{a^2}{RT^2}.$$

La relation cherchée entre les éléments de la courbe C est donc

$$\frac{1}{R} - \frac{aT'}{T^2} - \frac{a^2}{RT^2} = 0.$$

Il va sans dire que la relation de Mannheim s'obtient aussi facilement par l'emploi de la méthode vectorielle.

R. B.

CHRONIQUE.

Publications récentes.

I. H. Rocques Desvallées, calculateur principal au Bureau des Longitudes : *Tables logarithmiques et trigonométriques* à quatre décimales (argument en arc et en temps) et Tables à trois décimales, à l'usage

des physiciens et navigateurs. 1 vol. in-8 de XXIV-72 pages, 1920, Gauthier-Villars et Cie, éditeurs. Prix : 4fr + 50 pour 100.

II. M. Petrovitch, professeur à l'Université de Belgrade : *Les Spectres numériques*. Préface de E. Borel. 1 vol. in-8 de VIII-110 pages, 1919, Gauthier-Villars et Cie, éditeurs. Prix : 5fr + 50 pour 100.

Étude des relations entre les fractions décimales et les séries de puissances entières d'une variable.

G. Inghirami et Dr Prompt. — *Table des nombres premiers et de la décomposition des nombres de 1 à 100 000*. — 1 vol. in-8 de XX-36 pages. Gauthier-Villars et Cie, éditeurs. Paris, 1919. Prix : 5fr + 50 pour 100.

Réimpression, par les soins du Dr Prompt et de M. E. Lebon, d'une Table publiée en 1832 par un religieux italien, le P. Giovanni Inghirami, directeur de l'Observatoire Ximénien de Florence. Une telle Table était réclamée par les mathématiciens et les mécaniciens.

Facultés des Sciences (Personnel).

Dijon. — M. *Gevrey*, agrégé et docteur ès sciences, est nommé chargé de cours d'astronomie.

Lyon. — M. *Sire*, maître de conférences à la Faculté de Rennes, est nommé professeur de mathématiques appliquées, en remplacement de M. Flamme, décédé.

Marseille. — M. *Charve*, professeur de mécanique, a demandé un congé.

Paris. — M. *P. Appell*, membre de l'Institut, professeur de mécanique analytique et mécanique céleste, est nommé recteur de l'Université de Paris.

M. *E. Borel*, professeur de théorie des fonctions, est nommé professeur de calcul des probabilités et de physique mathématique en remplacement de M. Boussinesq.

La chaire de théorie des fonctions est transformée en chaire de physique théorique et physique céleste.

M. *Montel* est nommé maître de conférence de mathématiques en remplacement de M. Vessiot appelé à d'autres fonctions.

Rennes. — M. *Bouligand*, agrégé et docteur ès sciences, est nommé maître de conférences de mathématiques en remplacement de M. Sire.

Clermont-Ferrand. — M. *G. Giraud*, docteur ès Sciences, est chargé du cours de calcul différentiel et intégral, en remplacement de M. Pellet, professeur, mis à la retraite sur sa demande et nommé professeur honoraire.

Paris. — M. *A. Lambert* est chargé de conférences d'astronomie.

Poitiers. — M. *R. Garnier*, chargé de cours, est nommé professeur de mécanique rationnelle et appliquée, en remplacement de M. Fréchet, nommé à Strasbourg.

École Normale.

Les épreuves écrites du concours d'admission auront lieu du 7 au 10 juin 1920. Les programmes de mathématiques, physique et chimie sont les mêmes que ceux du concours d'admission à l'École Polytechnique insérés au *Journal Officiel* du 14 janvier 1920, programmes qui diffèrent de ceux de 1914 par de nombreuses et importantes coupures pratiquées durant la guerre.

M. *E. Vessiot* est nommé sous-directeur de l'Ecole Normale (directeur des études scientifiques), en remplacement de M. Borel, démissionnaire.

Un décret a institué à l'École Normale des chaires et maîtrises de conférences, de manière à lui rendre une organisation autonome.

Académie des Sciences.

M. *A. Mesnager* a été élu membre de l'Académie dans la Section de Mécanique, en remplacement de M. Marcel Deprez.

Sir John Larmor (Cambridge) a été élu correspondant dans la Section de Géométrie, en remplacement de M. Liapounoff.

Périodiques.

Journal de Mathématiques pures et appliquées (8e série, t. 1) :

L. Roy : Les ondes électromagnétiques planes périodiques et le problème de leur réflexion et de leur réfraction. — G. Julia : Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles. — F.-C. Clapier : Sur les surfaces minima ou élassoïdes. — G. Cerf : Sur les transformations des équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque à deux variables indépendantes.

Annales de l'École Normale (t. 36, 1919) :

Ét. Delassus : Étude de la stabilité de l'équilibre des paramètres principaux et secondaires d'un système dans le cas régulier d'intégration par quadratures. — J. Pérès : Sur certaines transformations fonctionnelles et leur application à la théorie des fonctions permu-

tables. — L. Godeaux : Sur les involutions appartenant à une surface de genre un. — E. Borel : Sur l'intégration des fonctions non bornées et sur les définitions constructives. — G. Julia : Sur quelques propriétés nouvelles des fonctions entières ou méromorphes. — E. Cotton : Sur la notion de nombre caractéristique de Liapounoff. — G. Giraud : Sur les fonctions automorphes d'un nombre quelconque de variables. — S. Stoïlow : Sur les singularités mobiles des intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles et sur leur intégrale générale.

Acta mathematica (t. **42**, 1919) :

D. Hilbert : G. Darboux (traduction d'un discours lu le 12 mai 1917 à la séance publique annuelle de l'Académie des Sciences de Gœttingue). — L. P. Eisenhart : Darboux's Anteil an der Geometrie (traduction allemande d'une conférence faite à l'*American Mathematical Society* le 6 septembre 1917).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

893.

(1868, p. 336 ; 1916, p. 321).

Si l'on coupe un tore, ou plus généralement une cyclide, par une série de sphères ayant pour centre un point fixe donné, toutes les courbes d'intersection ainsi obtenues peuvent être placées sur un même cône du deuxième degré. E. Laguerre.

Solution

Par M. R. B.

Montrons que, d'une manière générale :

Si l'on coupe par une série de sphères concentriques la surface inverse d'un cône quelconque, toutes les courbes ainsi obtenues peuvent être placées sur un même cône.

Soient en effet C un cône quelconque de sommet A, Γ son inverse par rapport à un point O, S une sphère quelconque, Σ son inverse par rapport à O.

La courbe (C, S) est anallagmatique par rapport au point A. Il en est donc de même, comme il est classique, de la courbe (Γ, Σ). Cette courbe appartient donc à un cône C′, de sommet A′, chaque génératrice de ce cône contenant deux points de (Γ, Σ).

Il faut montrer que le cône C′ ne varie pas de grandeur lorsque S varie de telle manière que Σ conserve un centre fixe ω. Or, soient D une génératrice quelconque de C, P le plan (O, D), M et N les deux points où D coupe S, μ et ν leurs inverses. La droite D est l'inverse du cercle Oμν. Autrement dit, μν est la corde commune au cercle Δ, inverse de D et au cercle (P, S). Soient I le centre du cercle Δ, ω′ la projection de ω sur le plan P. μν est perpendiculaire à Iω′ et par suite à Iω. La direction de cette droite dans un plan P donné est donc indépendante du rayon de la sphère Σ. Autrement dit, deux cônes C′, correspondant à deux sphères Σ concentriques, ont leurs génératrices deux à deux parallèles. Ces deux cônes (dont les sommets sont deux points de la droite OA) sont donc homothétiques, et par conséquent égaux. C. Q. F. D.

Si le cône C est du second ordre, la courbe (C, S) est une *cyclique*, dont l'inverse est, comme on le sait, une courbe de même nature, et le cône C′ est aussi du second ordre. Quant à l'inverse de C, c'est une cyclide à deux points doubles (une cyclide de Dupin, si C est de révolution).

L'énoncé 893 est donc valable pour les cyclides à deux points doubles, en prenant le mot *cyclide* dans son sens

général : surface de quatrième ordre admettant l'ombilicale comme conique double.

Pour les propriétés des anallagmatiques, des cycliques et des cyclides invoquées dans cette solution, on pourra consulter l'Ouvrage de G. Darboux : *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques.*

2045.

(1906, p. 432.)

Soient (A, A′), (B, B′), (C, C′) *trois couples de semi-droites d'un même plan, les semi-droites d'un même couple étant parallèles et de même sens. Les cycles inscrits dans les quatre triangles* (A, B, C), (A, B′, C′), (A′, B, C′), (A′, B′, C) *sont tangents à un même cycle. Il en est de même des cycles inscrits dans les triangles* (A′, B, C), (A, B′, C), (A, B, C′), (A′, B′, C′).

Le théorème est encore vrai si les semi-droites d'un même couple sont parallèles et de sens contraires. On obtient comme cas particulier de cette dernière proposition le théorème de Feuerbach et le théorème suivant :

Soient ABC *un triangle*, A′, B′, C′ *les milieux de ses côtés. Les cercles inscrits dans les quatre triangles* A′B′C′, AB′C′, A′BC′, A′B′C, *sont tangents à un même cercle.*

La première proposition donne des théorèmes où interviennent des centres exinscrits. R. Bricard.

Solution

Par L'Auteur.

Ce théorème est démontré dans mon article *Sur le problème d'Apollonius et quelques propriétés des cycles* (1907, p. 491). *Voir* aussi l'article de M. M. Fouché *Sur le problème d'Apollonius* (1908, p. 116).

2315.

(1917, p. 199.)

Les droites sur lesquelles quatre plans donnés déterminent une division de rapport anharmonique constant

forment un complexe du second degré. Si les quatre plans sont les plans des faces du tétraèdre de référence, l'équation du complexe est

$$\frac{ps}{A} = \frac{qt}{B}\left(= \frac{ru}{C}\right) \qquad \text{avec} \qquad A + B + C = 0.$$

G. Fontené.

Solution

Par M. J. Lemaire.

Nous modifierons légèrement les notations de l'énoncé : si x, y, z, t et x', y', z', t' sont les coordonnées de deux points quelconques, nous représentons par

$$\begin{aligned} l &= xy' - yx', & p &= zt' - tz', \\ m &= xz' - zx', & q &= ty' - yt', \\ n &= xt' - tx', & r &= yz' - zy', \end{aligned}$$

les coordonnées pluckériennes (ponctuelles) de la droite qui joint ces points, coordonnées liées par l'identité

$$(1) \qquad lp + mq + nr = 0.$$

Cherchons l'un des rapports anharmoniques des points où la droite rencontre les plans qui forment le tétraèdre de référence : les coordonnées de tout point de la droite étant de la forme

$$hx + kx', \qquad hy + ky', \qquad hz + kz', \qquad ht + kt',$$

les quatre points correspondent aux valeurs de h et k ci-dessous :

$$\begin{aligned} \text{trace sur : } X = 0 &: h = x', & k &= -x, \\ Y = 0 &: h' = y', & k' &= -y, \\ Z = 0 &: h'' = z', & k'' &= -z, \\ T = 0 &: h''' = t', & k''' &= -t. \end{aligned}$$

Un des rapports anharmoniques du système de ces points a

pour valeur [1]

$$\frac{\frac{h}{k}-\frac{h''}{k''}}{\frac{h}{k}-\frac{h'''}{k'''}} : \frac{\frac{h'}{k'}-\frac{h''}{k''}}{\frac{h'}{k'}-\frac{h'''}{k'''}}$$

c'est-à-dire

$$\frac{hk''-hk''}{hk'''-hk'''} : \frac{h'k''-k'h''}{h'k'''-k'h'''},$$

ou encore

$$\frac{xz'-zx'}{xt'-tx'} : \frac{yz'-zy'}{yt'-ty'},$$

qu'on peut écrire

$$\frac{m}{n} : \frac{r}{-q} \qquad \text{ou} \qquad -\frac{mq}{nr}.$$

Le complexe des droites pour lesquelles ce rapport anharmonique a une valeur constante $-\frac{B}{C}$ a donc pour équation

$$(2) \qquad \frac{mq}{B} = \frac{nr}{C}$$

ou, en tenant compte de l'identité (1),

$$\frac{lp}{A} = \frac{mq}{B} = \frac{nr}{C}$$

avec la condition

$$A + B + C = 0.$$

Réciproquement, tout complexe qui a une équation de la forme (2) est *un complexe tétraédal*, c'est-à-dire un complexe de droites sur lesquelles les plans des faces du tétraèdre de référence déterminent une division de quatre points dont un des rapports anbarmoniques a une valeur donnée.

Remarque. — Si une droite est déterminée par deux plans

$$uX + vY + wZ + sT = 0,$$
$$u'X + v'Y + w'Z + s'T = 0,$$

---

[1] CHASLES, *Géométrie supérieure*, p. 25.

on peut prendre aussi pour coordonnées pluckériennes (tangentielles) de la droite les quantités

$$\begin{aligned} \lambda &= uv' - vu', & \pi &= ws' - sw', \\ \mu &= uw' - wu', & \chi &= sv' - vs', \\ \nu &= us' - su', & \rho &= vw' - wv', \end{aligned}$$

liées par l'identité

$$\lambda\pi + \mu\chi + \nu\rho = 0.$$

On voit aisément que

$$\frac{l}{\pi} = \frac{m}{\chi} = \frac{n}{\rho} = \frac{p}{\lambda} = \frac{q}{\mu} = \frac{r}{\nu}.$$

Écrivant, en effet, que le point (x, y, z, t) est sur la droite, on a

$$\begin{cases} ux + vy + wz + st = 0, \\ u'x + v'y + w'z + s't = 0, \end{cases}$$

d'où, en éliminant x,

$$\lambda y + \mu z + \nu t = 0;$$

on aurait de même

$$\lambda y' + \mu z' + \nu t' = 0$$

et, par conséquent,

$$\frac{zt' - tz'}{\lambda} = \frac{ty' - yt'}{\mu} = \frac{yz' - zy'}{\nu},$$

c'est-à-dire

$$\frac{p}{\lambda} = \frac{q}{\mu} = \frac{r}{\nu};$$

on obtiendrait les autres relations par un calcul analogue.

L'équation générale des complexes tétraédraux établie ci-dessus, que l'on peut mettre sous la forme

$$(2') \qquad A'lp + B'mp + C'nr = 0,$$

A', B', C' désignant des constantes arbitraires, peut aussi être

écrite

$$(3) \qquad A'\lambda\pi + B'\mu\chi + C'\nu\rho = 0.$$

On déduirait aisément de ce qui précède la propriété fondamentale suivante : le système des quatre points déterminés par les faces d'un tétraèdre sur une droite quelconque a les mêmes rapports anharmoniques que le faisceau des plans déterminés par la droite et les sommets du tétraèdre ; de sorte que les équations (2') et (3) représentent toutes deux le complexe des droites dont les traces sur les plans du tétraèdre de référence ont un rapport anharmonique donné, ou des droites qui déterminent avec les sommets du tétraèdre des plans ayant ce même rapport anharmonique.

Autres solutions par M. R. Bouvaist, un *Abonné*.

2316.

(1917, p. 199.)

Soient α, β, γ *les points où un diamètre* δ *du cercle circonscrit à un triangle* ABC *coupe les côtés ;* α', β', γ' *les symétriques de* α, β, γ *par rapport au centre du cercle* ABC ; α'', β'', γ'' *les inverses triangulaires de* α', β', γ'. *Démontrer que les segments* $A\alpha''$, $B\beta''$, $C\gamma''$ *sont parallèles et que leurs milieux appartiennent à une droite qui passe par l'orthocentre du triangle et par l'orthopôle du diamètre* δ.

R. Goormaghtigh.

Solution

Par M. R. Bouvaist.

Soient OH l'orthocentre de ABC, O le centre du cercle circonscrit au triangle, ω le centre de l'hyperbole équilatère inverse de $\alpha\beta\gamma$, D le quatrième point d'intersection de cette hyperbole avec le cercle ABC. Le faisceau $A(\alpha' o \alpha \infty)$ est harmonique ; si par suite a désigne l'intersection de la tangente en A à l'hyperbole ABCD avec $H\omega D$, m_1 l'intersection de $A\alpha''$ avec $H\omega D$, le faisceau $A(m_1 H a D)$ sera harmonique ; en d'autres termes, $A\alpha''$ est la polaire de a par rapport à l'hyperbole ABCD, et m_1, milieu de $A\alpha''$, se trouve sur $H\omega D$. Il en est évidemment de même des milieux m_2 et m_3 de $B\beta''$, $C\gamma''$.

QUESTIONS.

2440. Soient P, E et F le point de rencontre et les milieux des diagonales AC et BD d'un quadrilatère ABCD inscrit dans un cercle O.

Montrer que :

1° Le cercle O, le cercle ω circonscrit et le cercle d'Euler du triangle diagonal MNP du quadrilatère ont même axe radical, la polaire du centre de gravité du triangle diagonal par rapport au cercle O.

2° Le cercle ω passe par l'orthocentre du triangle EPF, et la droite de Simson de ce point, par rapport au triangle MNP, par le centre des moyennes distances des sommets du quadrilatère.

V. Thébault.

2441. Si un polygone, plan ou gauche, d'un nombre pair de côtés, inscrit dans une sphère, est tel que le produit des côtés de rang pair égale le produit des côtés de rang impair, on peut inscrire et circonscrire une couronne de sphères, se coupant sous un même angle, consécutives et tangentes à la sphère circonscrite aux sommets du polygone, quelle que soit la première sphère, et réciproquement.

V. Thébault.

2442. Étant donné un réseau tangentiel de coniques, les cercles principaux des coniques du réseau dont le foyer décrit une droite sont orthogonaux à un cercle fixe.

Ce théorème comprend comme cas particulier le théorème de M. T. Lemoyne relatif aux cercles podaires des points d'une droite, par rapport à un triangle (*N. A.*, 1904, p. 400).

R. B.

[J2f]

SUR L'APPLICATION DE LA LOI DE GAUSS A LA POSITION PROBABLE D'UN POINT DANS LE PLAN OU DANS L'ESPACE ;

(*Suite et fin.*)

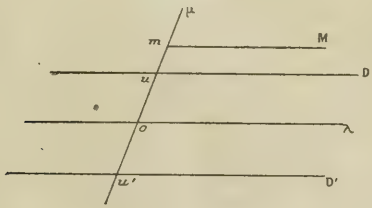
PAR M. J. HAAG.

III.

Les formules (47) et (57) sont beaucoup trop compliquées pour pouvoir être appliquées dans des problèmes posés par la pratique et leur intérêt est surtout théorique. Nous allons, au contraire, aboutir à des résultats très simples, en introduisant des coordonnées tangentielles.

20. *Détermination de l'ellipse unitaire par ses tangentes.* — Imaginons que, par un procédé quelconque, on sache calculer l'écart unitaire de la projection m sur une droite quelconque $O\mu$, parallèlement à une direction quelconque $O\lambda$. Portons cet écart

Fig. 19.



en Ou et Ou' (*fig.* 19), de part et d'autre du point O.

En menant par u et u' les parallèles D et D' à $O\lambda$,

on obtient deux tangentes à l'ellipse unitaire (n° 18).

En faisant varier $O\lambda$, on aura toutes les tangentes. *L'ellipse unitaire sera ainsi définie comme une enveloppe de droites.*

Le cas où cette enveloppe *dégénère en deux points* symétriques par rapport à O correspond au cas d'un vecteur unitaire, les deux points de dégénérescence étant l'extrémité de ce vecteur et le point symétrique par O.

Ceci s'étend à l'espace, en remplaçant la projection parallèlement à une droite par la projection parallèlement à un plan. L'ellipsoïde unitaire est alors défini comme enveloppe de plans. Il peut dégénérer en une ellipse ou en deux points (réduction à deux ou un vecteur).

Application à un groupe de points expérimentaux. — Si l'on possède un groupe assez nombreux de points expérimentaux, on peut essayer de voir s'il obéit à la loi de Gauss, de la manière suivante :

On commence par déterminer le point moyen O. Puis, on projette tous les points sur une droite $O\mu$, parallèlement à une droite (ou un plan) quelconque. On prend l'écart moyen des points obtenus.

On en déduit, par la construction ci-dessus, deux droites D et D′ (ou deux plans P et P′) symétriques par rapport à O.

En faisant varier la direction de la projection, on obtient ainsi autant de droites (ou de plans) que l'on veut. Toutes ces droites (ou plans) doivent envelopper une même ellipse (ou ellipsoïde), dégénérée ou non.

Bien entendu, à ce critère peuvent s'ajouter ceux qui permettent de reconnaître que les projections sur $O\mu$ obéissent elles-mêmes à la loi de Gauss, tels que

comparaison de l'écart moyen et de l'écart moyen quadratique.

Quoi qu'il en soit, si l'enveloppe sus-visée est une ellipse (ou un ellipsoïde), on pourra admettre, avec vraisemblance, la loi de Gauss.

En prenant l'homothétique de cette ellipse (ou ellipsoïde) dans le rapport $\sqrt{\pi}$, on aura l'ellipse (ou ellipsoïde) unitaire.

21. *Équation tangentielle des ellipses de probabilité.* — Si l'on prend deux axes de coordonnées quelconques, d'origine O, l'équation tangentielle de l'ellipse unitaire est de la forme

$$\varphi(u, v) = w^2, \tag{104}$$

$\varphi(u, v)$ étant une forme quadratique en u, v, réductible à une somme de deux carrés ou à un seul carré (cas de dégénérescence).

L'ellipse de probabilité (E_ω) d'indice ω, a pour équation tangentielle

$$\omega^2 \varphi(u, v) = w^2. \tag{105}$$

Cette équation donne immédiatement l'indice de l'ellipse de probabilité tangente à une droite donnée (u, v, w), ce qui est très important pour l'application de certaines formules du paragraphe II.

Connaissant l'équation (104), on peut aisément calculer la probabilité élémentaire en un point quelconque (x, y). Soit

$$\varphi(u, v) \equiv Au^2 + 2Buv + Cv^2. \tag{106}$$

En écrivant que le point (x, y) se trouve sur la conique (105) ou que le point $\left(\frac{x}{\omega}, \frac{y}{\omega}\right)$ se trouve sur la

conique (104), on trouve

$$(107) \qquad \omega^2 = \frac{Cx^2 - Ay^2 - 2Bxy}{AC - B^2}.$$

D'autre part, le produit des demi-axes de l'ellipse (104) est, en appelant θ l'angle des axes de coordonnées, égal à $\sqrt{AC - B^2}.\sin\theta$. Dès lors, la formule (25) devient

$$(108) \qquad P = \frac{dA}{\pi\sqrt{AC - B^2}.\sin\theta}\, e^{-\omega^2},$$

ω^2 étant donné par (107).

22. *Composition des ellipses.* — Soient n points indépendants $M_1, M_2, \ldots, M_n$, obéissant chacun à la loi de Gauss, avec les elllipses unitaires $(E_1), (E_2), \ldots, (E_n)$, définies par les équations tangentielles

$$(109) \qquad \varphi_i(u, v) = w^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Cherchons l'ellipse unitaire (E) qui convient au point M défini par

$$(110) \qquad (OM) = (OM_1) + (OM_2) + \ldots + (OM_n).$$

Si nous projetons cette égalité géométrique sur $O\mu$ parallèlement à $O\lambda$, nous avons

$$(111) \qquad \overline{Om} = \overline{Om_1} + \overline{Om_2} + \ldots + \overline{Om_n}.$$

Nous savons (n° 1) que l'écart unitaire de $\overline{Om}$ est la racine carrée de la somme des carrés des écarts unitaires de $\overline{Om_1}, \overline{Om_2}, \ldots \overline{Om_n}$, Il en résulte, en vertu du n° 20, que *la distance de* O *à une tangente quelconque de* (E) *est la racine carrée de la somme des carrés des distances de* O *aux tangentes parallèles de* $(E_1), (E_2), \ldots, (E_n)$.

Voilà une construction fort simple, qui permet d'avoir aisément toutes les tangentes à (E). Elle va nous conduire aussi, immédiatement, à l'équation tangentielle de cette ellipse. En effet, les distances de O aux tangentes aux ellipses (109) de direction (u, v) sont proportionnelles $\sqrt{\varphi_i(u, v)}$. Il en résulte que l'équation tangentielle de (E) est

$$(112) \qquad \varphi_1(u, v) + \varphi_2(u, v) + \ldots + \varphi_n(u, v) = w^2.$$

Nous avons donc la règle fort simple suivante :

Règle. — *Pour composer plusieurs ellipses, on ajoute les premiers membres de leur équation tangentielles, les seconds membres étant* w^2.

Cette règle s'applique, sans distinction, à tous les cas, y compris les cas de dégénérescence. En particulier, si l'on a affaire aux n vecteurs considérés au n° 10, on a

$$(113) \qquad \varphi_i(u, v) = (a_i u + b_i v)^2.$$

En portant dans (112) et appliquant ensuite les formules (108) et (107), on retrouve les formules (47) et (48).

On peut aussi retrouver la construction donnée au n° 5 pour la composition d'une ellipse et d'un vecteur. L'ellipse (E′) résultante de l'ellipse (E), définie par (104) et du vecteur (OU), de projections a, b, a pour équation tangentielle

$$(114) \qquad \varphi'(u, v) \equiv \varphi(u, v) + (au + bv)^2 = w^2.$$

On voit d'abord qu'elle est bitangente à (E), le pôle de la corde de contact ayant pour équation tangentielle $au + bv = 0$, c'est-à-dire étant le point à l'infini

sur OU. Autrement dit, la corde de contact est le diamètre conjugué de OU.

En second lieu, si, conservant les notations du n° 5, nous posons $\lambda = \frac{OB}{OU}$, $\lambda' = \frac{OB'}{OU}$, les équations

$$(115) \qquad \varphi(u, v) = \lambda^2(au + bv)^2,$$

$$(116) \qquad \varphi'(u, v) = \lambda'^2(au + bv)^2$$

doivent admettre une racine double en $\frac{u}{v}$. Si l'on écrit cette condition pour (115), on obtient une équation du premier degré en λ^2, comme cela est, du reste, évident *a priori*. Mais, grâce à (114), l'équation (116) coïncide avec (115), si l'on prend

$$(117) \qquad \lambda'^2 = \lambda^2 + 1$$

Si λ^2 donne une racine double à (115), λ'^2 donnera une racine double à (116). Comme, pour chaque équation, il n'y a qu'une valeur de λ'^2 (ou λ^2) satisfaisant à cette condition, on a nécessairement la relation (117) entre les rapports $\frac{OB}{OU}$ et $\frac{OB'}{OU}$, ce qui équivaut à

$$\overline{OB'}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OU}^2.$$

Ainsi sont démontrées les deux règles qui caractérisent la construction donnée au n° 5.

On pourrait, tout aussi facilement, démontrer la règle donnée pour la composition de deux ellipses.

23. *Cas des ellipsoïdes.* — Tout ce qui précède s'étend, sans difficulté, à l'espace à trois (et même à n) dimensions.

L'équation (104) est alors remplacée par

$$\varphi(u, v, w) = r^2, \tag{118}$$

$\varphi(u, v, w)$ désignant une forme quadratique, somme de trois carrés, deux carrés ou un carré, suivant que l'éllipsoïde ne dégénère pas, dégénère en un ellipsoïde ou dégénère en deux points.

L'indice ω continue à être donné par une équation analogue à (105). Les formules (107) et (108) pourraient être étendues, mais de façon moins simple.

Quant aux règles données au n° 22 pour la composition des ellipses, elles s'appliquent, sans aucune modification, à la composition des ellipsoïdes, dégénérés ou non. On peut, si l'on veut, en déduire les constructions du n° 7. On pourrait aussi, mais avec beaucoup plus de peine, retrouver les formules (57) et (58).

24. *Conclusion.* — La conclusion qui se dégage du § III est que, dans les questions de probabilité de situation d'un point dans le plan ou dans l'espace, les coordonnées tangentielles sont d'un emploi beaucoup plus commode que les coordonnées ponctuelles. Elles permettent, par une extension très simple de la combinaison quadratique des écarts, de composer facilement les probabilités indépendantes. Elles s'appliquent aisément à l'étude des groupes de points expérimentaux et, en particulier, en Artillerie, à la dispersion du tir fusant [1].

---

[1] C'est ainsi que j'ai pu déduire du dépouillement d'un certain nombre de tirs aériens la loi de probabilité du tir de l'obus à balles de 75 dans tout son plan de tir.

TABLE DE LA FONCTION $\Theta_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\varphi} e^{-\frac{k^2}{\cos^2\varphi}} d\varphi$ (EN CENTIÈMES).

	k.								
φ.	0.	0,2.	0,4.	0,6.	0,8.	1.	1,2.	1,4.	1,6.
10°.....	3	3	2	2	1	1	1	0	0
20.....	6	5	5	4	3	2	1	1	0
30.....	8	8	7	6	4	3	2	1	1
40.....	11	11	9	7	5	3	2	1	1
50.....	14	13	11	9	6	4	2	1	1
60.....	17	16	13	10	6	4	2	1	1
70.....	19	18	14	10	6	4	2	1	1
80.....	22	19	14	10	7	4	2	1	1
90.....	25	19	14	10	7	4	2	1	1

Pour $k > 1,6$, $\Theta_1 < 0,01$.

TABLE DE LA FONCTION $\Theta_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\varphi} e^{-\frac{k^2}{\sin^2\varphi}} d\varphi$ (EN CENTIÈMES).

	k.								
φ.	0.	0,2.	0,4.	0,6.	0,8.	1.	1,2.	1,4.	1,6.
10°.....	3	0							
20.....	6	2	0						
30.....	8	4	2	0					
40.....	11	6	3	1	0				
50.....	14	9	5	3	1	1	0		
60.....	17	12	7	4	2	1	1	0	
70.....	19	14	10	6	4	2	1	0	
80.....	22	17	12	8	5	3	2	1	0
90.....	25	19	14	10	6	4	2	1	1

Pour $k > 1,6$, $\Theta_2 < 0,01$.

Nota. — Cette Table et la précédente sont extraites de Tables plus complètes, annexées à la Note citée plus haut de la Commission de Gâvre.

[K'9d]

SUR UN SYSTÈME REMARQUABLE DE CINQ DROITES;

PAR M. RAOUL BRICARD.

1. Considérons tout d'abord un système de cubiques planes jouissant des propriétés suivantes : 1° elles ont un un point double donné ; 2° leurs tangentes en ce point double se correspondent dans une involution donnée ; 3° les cubiques passent par quatre points fixes. Si l'on prend pour origine le point O et pour axes Ox et Oy les rayons doubles de l'involution donnée, l'équation générale des cubiques considérées est de la forme

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fy^3 = 0.$$

Les conditions n° 3 introduisent entre les coefficients quatre relations linéaires. On voit finalement que les cubiques dépendent linéairement d'un paramètre, et l'on peut écrire ainsi leur équation générale :

$$P + \lambda P' = 0, \tag{1}$$

en posant

$$P = a\,x^3 + b\,x^2y - c\,xy^2 + d\,y^3 + x^2,$$
$$P' = a'x^3 + b'x^2y + c'xy^2 + d'y^3 + y^2.$$

Les cubiques (1) passent par tous les points communs à $P = 0$, $P' = 0$. Or ces deux dernières cubiques ayant en commun un point double, qui compte pour quatre, se coupent encore en $9 - 4 = 5$ points, dont quatre sont les points donnés A_1, A_2, A_3, A_4. Par conséquent, *les cubiques* (1) *passent toutes par un cinquième point fixe* A_5.

Il est clair que l'un quelconque des cinq points A_i est déterminé d'une manière unique par les quatre autres, et que les relations entre ces cinq points sont symétriques. Faisons encore la remarque suivante : parmi les cubiques (1), il en est une qui se décompose en la conique $(OA_1A_2A_3A_4)$ et en la droite OA_5. La tangente en O à la conique et la droite OA_5 sont conjuguées par rapport à Ox et Oy. Il existe cinq cubiques dégénérées analogues, dont la considération permet aisément d'obtenir par des constructions linéaires l'un des points A_i, quand on connaît les quatre autres. Je n'insiste pas là-dessus, ayant surtout en vue l'étude de la figure corrélative, ainsi qu'on le verra tout à l'heure.

2. On peut écrire

$$(2) \qquad P = Lx^2 - My^2, \qquad P' = L'x^2 + M'y^2,$$

en posant

$$(3) \qquad \begin{cases} L = ax + by + 1, & M = cx + dy, \\ L' = a'x + b'y, & M' = c'x + d'y + 1, \end{cases}$$

On voit que les points A_i, qui sont sur

$$Lx^2 - My^2 = 0, \qquad L'x^2 + M'y^2 = 0,$$

et pour lesquels on n'a pas à la fois

$$x = 0, \qquad y = 0.$$

appartiennent à la conique

$$(4) \qquad LM' - ML' = 0.$$

Cette conique joue un rôle important dans le système des cubiques (1). En effet, l'équation (1) peut s'écrire

$$x^2(L + \lambda L') + y^2(M + \lambda M') = 0.$$

On reconnaît que la tangente à (1), au point R autre que O où cette cubique rencontre Ox, est

$$L + \lambda L' = 0.$$

De même la tangente à (1), au point S autre que O où cette cubique rencontre Oy, est

$$M + \lambda M' = 0.$$

En éliminant λ entre les équations précédentes, on retombe sur (4). *La conique* (4) *est donc le lieu du point* T *où se rencontrent les tangentes à* (1) *aux points* R *et* S.

3. Opérons maintenant une transformation dualistique en faisant correspondre au point O la droite de l'infini et aux droites Ox et Oy les points cycliques I et J. Les cubiques (1) deviennent des courbes de troisième classe Γ^3, ayant pour bitangente commune la droite de l'infini et telles que leurs points de contact avec cette bitangente soient conjugués par rapport aux points cycliques. Ce sont les *monofocales à directions asymptotiques rectangulaires* que M. F. Girault a rencontrées dans une étude récente [1].

On voit que *les courbes* Γ^3 *qui touchent quatre droites* D_1, D_2, D_3, D_4 *en touchent une cinquième* D_5. Les relations entre les cinq droites D_i sont symétriques et inaltérées dans une transformation par similitude, puisqu'une telle transformation conserve les points I et J.

Étudions de plus près le système des cinq droites D_i.

Parmi les courbes Γ^3, il en est cinq dégénérées correspondant au cinq cubiques dégénérées du faisceau

---

[1] *Sur le cercle de Miquel* (*N. A.*, 1919, p. 452).

ponctuel des cubiques (1). Chacune d'elles se décompose en une parabole et un point rejeté à l'infini dans une direction perpendiculaire à l'axe de cette parabole. L'une d'elles sera, par exemple, composée de la parabole P_5, tangente à D_1, D_2, D_3, D_4, et du point rejeté à l'infini dans la direction perpendiculaire à l'axe de P_5. Mais ce dernier point doit être sur D_5. D_5 est donc perpendiculaire à l'axe de P_5, qui est lui-même parallèle à la droite de Newton du quadrilatère $D_1 D_2 D_3 D_4$.

On peut dire aussi que D_5 est parallèle à la directrice Δ_5 de P_5, c'est-à-dire à la droite qui joint les orthocentres des triangles formés par les droites D_1, D_2, D_3, D_4, prises trois à trois. De même, avec des notations analogues, D_4 est parallèle à Δ_4, etc.

Voyons maintenant ce que donne le résultat obtenu à la fin du n° 2, par transformation dualistique.

La conique (4) devient la conique tangente au cinq droites D_i. Pour une courbe Γ^3 correspondant à une cubique (1), les points R et S deviennent les tangentes, autres que la droite de l'infini, qu'on peut lui mener par les points cycliques, et le point T devient la droite qui joint les points de contact de ces tangentes, droite qu'on peut appeler la *directrice* de Γ^3. Donc *les directrices des courbes* Γ^3 *enveloppent la conique* Γ *tangente aux cinq droites* D_i.

Pour les cinq Γ^3 dégénérées, les directrices sont les directrices Δ_i des paraboles P_i. Donc ces cinq directrices touchent Γ. Cela conduit à la propriété la plus frappante des cinq droites D_i. Considérons par exemple les deux droites D_4 et D_5 et les directrices Δ_4 et Δ_5 des paraboles P_4 et P_5. D'après ce qu'on vient de voir, D_4 et Δ_4 sont deux tangentes parallèles à Γ ; de même D_5 et Δ_5. Par conséquent, le point d'intersection de D_4 et de D_5 est symétrique, par rapport au centre ω de Γ, du

point d'intersection de Δ_4 et de Δ_5. Mais ce dernier point n'est autre que l'orthocentre du triangle $D_1 D_2 D_3$, car cet orthocentre est à la fois sur Δ_4 et sur Δ_5.

En résumé :

Étant données dans le plan quatre droites quelconques D_1, D_2, D_3, D_4, *on peut leur adjoindre une cinquième droite* D_5, *le système des cinq droites* D_i *jouissant des propriétés suivantes :*

1° *Chacune des droites est parallèle à la directrice de la parabole tangente aux quatre autres droites;*

2° *Les cinq droites et les cinq directrices, deux à deux parallèles, sont tangentes à une même conique;*

3° *Le centre de cette dernière conique est le point milieu de tous les segments ayant pour extrémités, d'une part le point de rencontre de deux droites* D_i, *d'autre part l'orthocentre du triangle formé par les trois autres.*

Pour construire D_5, étant données D_1, D_2, D_3, D_4, le plus expéditif semble être ceci : on construit les orthocentres H_{123} et H_{234} des triangles $D_1 D_2 D_3$ et $D_2 D_3 D_4$, puis la droite D'_1 obtenue en donnant à D_1 la translation définie par le vecteur $H_{123} H_{234}$. D_5 est la parallèle menée à $H_{123} H_{234}$ par le point où D'_1 rencontre D_4.

En effet, la droite D_5 ainsi construite est bien parallèle à Δ_5 qui n'est autre que $H_{123} H_{234}$, et elle rencontre D_1 et D_4 en des points P_{15} et P_{45} tels que $P_{15} H_{234}$ et $P_{45} H_{123}$ aient les mêmes points milieux. Comme il n'y a visiblement qu'une droite satisfaisant à

ces conditions, on a bien construit la droite D_5 qu'il fallait.

Il est aisé de voir, en particulier, que les cinq côtés d'un pentagone régulier forment un système de la nature considérée.

Revenant au cas général, on peut remarquer qu'il y a réciprocité entre le système des cinq droites D_i et le système des cinq directrices Δ_i.

Il y a sans doute des relations nombreuses et plus ou moins intéressantes à trouver entre les cinq droites D_i et les points, droites, cercles, etc., attachés, soit à l'ensemble des cinq droites, soit aux triangles et quadrilatères qu'elles forment, prises trois à trois ou quatre à quatre.

[O3gα]

RAYON DE COURBURE DE LA COURBE QUI EST LE LIEU DES CENTRES DES SPHÈRES OSCULATRICES A UNE COURBE GAUCHE;

PAR M. G. FONTENÉ.

I.

1. Soit (A) une courbe et (A′) la courbe qui est l'enveloppe des axes des cercles osculateurs ou le lieu des centres des sphères osculatrices. La tangente T′ en A′ à la seconde courbe est parallèle à la binormale B en A, de sorte que la tangente T en A est parallèle à la binormale B′ en A′; les normales principales N et N′ sont parallèles; on peut appliquer aux deux courbes le théorème que j'ai donné dans la Note précédente, et utiliser les figures de cette Note.

La courbe (A) ayant fourni la courbe (A′), celle-ci fournit de même une courbe (A″); les courbes (A) et (A″) ont leurs tangentes parallèles.

2. M. Bricard a indiqué pour le rayon de courbure R′ de la courbe (A′) la formule

$$(1) \qquad R' = \left| \rho \frac{d\rho}{dR} \right|,$$

ρ étant le rayon de la sphère osculatrice; j'ai donné une démonstration géométrique de cette formule (N. A., question 2312, 1917, p. 80, et 1919, p. 79). Le vecteur $C\Omega$ qui va du centre de courbure de la courbe (A) au centre Ω de la sphère osculatrice ayant pour expression

$$\overline{C\,\Omega} = -\frac{dR}{d\omega}$$

on a

$$\rho^2 = R^2 + \left(\frac{dR}{d\omega}\right)^2,$$

d'où l'on déduit

$$\rho \frac{d\rho}{d\omega} = R\frac{dR}{d\omega} + \frac{dR}{d\omega}\frac{d^2R}{d\omega^2}$$
$$= \frac{dR}{d\omega}\left(R + \frac{d^2R}{d\omega^2}\right),$$

ou

$$\rho \frac{d\rho}{dR} = R + \frac{d^2R}{d\omega^2};$$

on a donc encore

$$(2) \qquad R' = \left| R + \frac{d^2R}{d\omega^2} \right|.$$

Selon que les normales principales N *et* N′ *aux deux courbes* (*A*) *et* (*A*′) *sont de sens contraires ou de même sens, on a*

$$R' = \pm \rho \frac{d\rho}{dR} = \pm \left(R + \frac{d^2R}{d\omega^2}\right);$$

si l'on donnait un signe à R', d'après le sens relatif des deux rayons de courbure, on aurait toujours

$$(3) \qquad R' = -\rho\frac{d\rho}{dR} = -\left(R + \frac{d^2R}{d\omega^2}\right).$$

Les normales principales N et N' sont de sens contraires, si l'on a

$$(4) \qquad \rho\frac{d\rho}{dR} > 0 \quad \text{ou} \quad R + \frac{d^2R}{d\omega^2} > 0.$$

J'ai retrouvé la formule (2), avec la remarque précédente, en complétant un calcul de M. Egan (*N. A.*, 1918, p. 76). Les coordonnées x', y', z' du point Ω sont données par les formules

$$x' = x + \lambda R - \alpha\left(T\frac{dR}{ds}\right), \qquad \ldots,$$

où l'on a mis $T\frac{dR}{ds}$ au lieu de $\frac{dR}{d\omega}$; si l'on différentie la première de ces formules par rapport à s, en tenant compte des dernières formules de Frenet

$$\frac{d\lambda}{ds} = -\frac{a}{R} - \frac{\alpha}{T},$$

on a

$$\begin{aligned}\frac{dx'}{ds} \quad \text{ou} \quad \frac{dx'}{ds'}\frac{ds'}{ds} &= a - a - \alpha\frac{R}{T} \\ &\quad + \lambda\frac{dR}{ds} - \lambda\frac{dR}{ds} - \alpha\frac{d}{ds}\left(T\frac{dR}{ds}\right) \\ &= -\alpha\left[\frac{R}{T} + \frac{d}{ds}\frac{dR}{d\omega}\right],\end{aligned}$$

en remettant $\frac{dR}{d\omega}$ *au lieu de* $T\frac{dR}{ds}$; la demi-tangente T' étant de même sens que la binormale B, on a $\frac{dx'}{ds'} = \alpha$,

et il reste, α *disparaissant*,

$$\frac{ds'}{ds} = -\left[\frac{R}{T} + \frac{d}{ds}\frac{dR}{d\omega}\right];$$

en multipliant les deux membres de l'égalité par T, on obtient

$$\frac{ds'}{d\omega} = -\left(R + \frac{d^2 R}{d\omega^2}\right);$$

selon que les normales principales N et N′ sont de sens contraires ou de même sens, on a (Note précédente) $d\sigma' = \mp d\omega$, et, par suite,

$$R' = \pm\left(R + \frac{d^2 R}{d\omega^2}\right).$$

3. Si la courbe (A) est une courbe à courbure constante, le centre A′ de la sphère osculatrice en A n'est autre que le centre de courbure en A; les deux courbes (A) et (A′) sont réciproques. La condition (4) est ici réalisée, et en effet les normales principales sont AA′ et A′A; la formule (3), avec $\rho = R$, donne bien $R' = -R$.

Si, au lieu de supposer R constant, on suppose $R = A\omega + B$, la condition (4) est encore réalisée, les normales principales sont de sens contraire, on a $R' = -R$.

II.

4. Pour une courbe sphérique, les quantités x', y', z' sont des constantes. *Une courbe sphérique est caractérisée par l'équation intrinsèque*

$$(5) \qquad R + \frac{d^2 R}{d\omega^2} = 0,$$

ou

$$(6) \qquad R^2 + \left(\frac{dR}{d\omega}\right)^2 = \text{const.} = \rho^2,$$

ou

$$(7) \qquad \begin{cases} R = \rho \sin(\omega - \alpha), \\ R = a\cos\omega + b\sin\omega, \ (\rho = \sqrt{a^2 + b^2}); \end{cases}$$

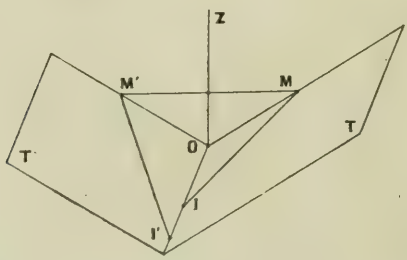
cette dernière relation constitue l'équation intrinsèque la plus simple des courbes sphériques.

Avec une origine convenable pour l'arc ω, la formule (7) peut s'écrire

$$R = \rho \sin\omega;$$

cette formule peut s'établir directement. Elle se confondra en effet avec le théorème de Meusnier *si l'on démontre que ω, angle de contingence totale pour la torsion, est égal à l'angle du plan osculateur à la courbe avec le plan tangent à la sphère*, ou mieux que les différentielles de ces deux angles sont égales. Cela résulte de ce que tous les points d'une sphère sont

Fig. 1.

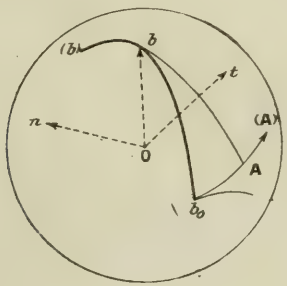


des ombilics. L'intersection des plans tangents T et T' en deux points M et M' infiniment voisins sur la courbe est perpendiculaire à MM' : soit OII' cette intersection, O étant le point situé dans le plan per-

pendiculaire mené par MM′, et les plans osculateurs à la courbe en M et M′ étant les plans M′MI et MM′I′ ; à cause de OM = OM′, le plan bissecteur zOI du dièdre obtus (T, T′) est un plan de symétrie pour chacun des deux plans osculateurs ; la différence entre l'angle des plans T′ et MM′I′ et celui des plans T et M′MI est donc égale à l'angle des plans MM′I′ et M′MI, c'est-à-dire qu'elle a pour valeur $d\omega$.

Le fait énoncé ci-dessus peut encore s'établir en disant : le rayon de la sphère étant supposé égal à *un*, si l'on construit l'indicatrice sphérique sur cette sphère, le rayon Ob parallèle à la binormale (axe de courbure en A) donne un point b (pôle du cercle de courbure), qui est le centre de courbure sphérique en A, c'est-à-dire le point de contact du grand cercle normal Ab avec son enveloppe (b), développée sphérique de la courbe (A) ; si b_0 est une origine convenablement choisie, on sait que *l'arc b_0 b de cette développée est égal au rayon de courbure sphérique* Ab, *comme dans le*

Fig. 2.



plan ; l'angle de contingence totale pour la torsion est donc égal à l'angle du plan osculateur à la courbe avec le plan tangent à la sphère.

CHRONIQUE.

Strasbourg. — Cours et conférences de Mathématiques en 1920-1921.

PREMIER SEMESTRE (1er novembre-28 février).

MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES. — MM. Denjoy, Pérès et Thiry : Éléments d'Analyse, de Géométrie analytique et de Mécanique (5).

ANALYSE. — MM. Valiron et Antoine : Opérations générales du Calcul différentiel et intégral. Fonctions analytiques. Éléments de Géométrie infinitésimale (5).

MÉCANIQUE RATIONNELLE. — MM. Villat et Véronnet : Statique, Cinématique, Dynamique du point (5).

ASTRONOMIE. — M. Esclangon : Astronomie stellaire (2).

ANALYSE SUPÉRIEURE. — M. Fréchet : *Éléments du Calcul des probabilités* (2). *Notions sur les équations intégrales* (1).

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE. — M. Bauer : *Théorie des quanta. Constitution des atomes* (3).

DEUXIÈME SEMESTRE (1er mars-20 juin).

MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES. — MM. Pérès et Thiry : Compléments d'Analyse, de Géométrie analytique et Mécanique (3).

Analyse. — MM. Valiron et Antoine : Équations différentielles et aux dérivées partielles. Compléments de Géométrie infinitésimale (3).

Astronomie. — M. Esclangon : Astronomie stellaire (2).

Analyse supérieure. — M. Fréchet : *Applications du Calcul des probabilités* (1). *Fonctions de lignes* (2).

Physique mathématique. — M. Bauer : *Applications statistiques de la théorie des quanta* (3).

Hydrodynamique. — M. Villat : *Recherches sur le mouvement d'un solide dans un fluide visqueux* (2).

Géométrie infinitésimale. — M. Pérès : *Les transformations des surfaces applicables sur les quadriques* (2).

Théorie des fonctions. — M. Valiron : *Séries de Dirichlet et de factorielles.*

Nota. — 1° Les nombres de leçons par semaine sont indiqués entre parenthèses ( ).

2° Les *cours de recherches* sont indiqués en italiques.

3° En dehors des cours, trois conférences de préparation à l'enseignement (agrégation, écoles normales, etc.) seront faites chaque semaine.

4° Au moins une fois par mois, un colloque mathématique réunira professeurs et étudiants sous la direction de M. Fréchet.

5° Pour tous renseignement, s'adresser à M. Fréchet, directeur de l'Institut de Mathématiques, 2, quai Jacoutot, Robertsau, Strasbourg.

CERTIFICATS D'ANALYSE SUPERIEURE.

Grenoble.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — 1° *Étude générale de la fonction*

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2+1)\sqrt{z}};$$

points singuliers?

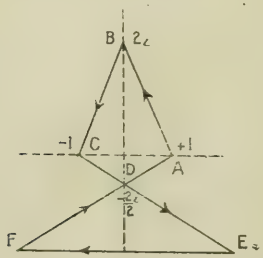
2° *Calculer l'intégrale définie :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x - \sin x}{+\sqrt{x}(x^2+1)}\,dx$$

(à cet effet, on étudiera l'intégrale $\int f(z)\,dz$ *prise le long d'un contour convenablement choisi).*

3° *On pose*

$$a = \int_0^1 \frac{\cos x\,dx}{+\sqrt{x}(x^2+1)}, \quad b = \int_0^1 \frac{\sin x\,dx}{+\sqrt{x}(x^2+1)}.$$



On demande l'expression, à l'aide de a et de b, de l'intégrale

$$\int_C^1 \frac{e^{iz}\,dz}{(z^2+1)\sqrt{z}},$$

c désignant un contour tel que ABCDEFDA, *et* $\sqrt{z}$ *ayant la valeur* $+1$ *au point de départ* A.

Nota. — Dans l'énoncé, x désigne une variable d'intégration essentiellement réelle.

Solution. — 1° La fonction $f(z)$ admet deux pôles simples $z = \pm i$ et un point critique de branchement $z = 0$; une rotation de l'affixe de z autour de ce dernier point change le signe de la fonction.

Les résidus relatifs aux pôles $\pm i$ sont

$$R_1 = -\frac{e^{-1}}{2\sqrt{2}}(1+i), \qquad R_2 = -\frac{e}{2\sqrt{2}}(1-i).$$

2° Soit I l'intégrale demandée. Calculons $\int_c f(z)\,dz$ le long d'un contour Γ formé d'un cercle C de rayon très grand et de centre $z = 0$, qu'on quitte près de l'axe Ox pour décrire un lacet autour de l'origine. Nous avons

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i(R_1 - R_2).$$

Or l'intégrale prise le long de C et du cercle c du lacet tendent vers zéro, lorsque les rayons tendent respectivement vers l'infini et zéro. Il reste

$$-2\int_0^\infty \frac{\cos x + i\sin x}{+\sqrt{x}(1+x^2)}\,dx = 2\pi i(R_1 + R_2).$$

et l'on en déduit

$$\int_0^\infty \frac{\cos x + i\sin x}{+\sqrt{x}(1+x^2)}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}(\operatorname{sh}1 + i\operatorname{ch}1).$$

et

$$I = \frac{\pi}{2}(\operatorname{sh}1 - \operatorname{ch}1) = -\frac{\pi}{\sqrt{2}e}.$$

3° Considérons le lacet l allant du point $z = 1$ à l'origine

qu'il entoure. On a

$$\int_{ABCDA} - \int_{\Gamma} = 2\pi i R_1,$$

$$\int_{DEFD} = -2\pi i R_2;$$

l'intégrale demandée est donc

$$\int_{\Gamma} + 2\pi i (R_1 - R_2),$$

ou

$$-2\int_0^1 \frac{\cos x + i \sin x}{+\sqrt{x}(1+x^2)}\,dx + \frac{2\pi i}{\sqrt{2}}(\operatorname{sh} 1 - i \operatorname{ch} 1),$$

ou enfin

$$(\pi\sqrt{2}\operatorname{ch} 1 - 2a) + i(\pi\sqrt{2}\operatorname{sh} 1 - 2b).$$

Épreuve pratique. — *Trouver deux nombres a et b tels que les deux fonctions*

$$f(u) = e^{au}\frac{\sigma^2(u-\omega-\omega')}{\sigma^2 u},$$

$$g(u) = e^{bu}\frac{\sigma(u-\omega)\sigma(u-\omega')}{\sigma u\,\sigma(u-\omega-\omega')}.$$

admettent les périodes 2ω *et* $2\omega'$.

a et b étant ainsi déterminés, décomposer $f(u)$ *et* $g(u)$ *en éléments simples; comparer les résultats obtenus.*

Solution. — Le changement de u en $u+2\omega$ et en $u-2\omega'$ multiplie respectivement

$$f(u) \quad \text{par} \quad e^{2a\omega-4\eta\omega'-4\eta\omega} \quad \text{et} \quad e^{2a\omega'-4\eta'\omega-4\eta'\omega'},$$

$$g(u) \quad \text{par} \quad e^{2b\omega} \quad \text{et} \quad e^{2b\omega'},$$

ou, en tenant compte de la relation

$$\eta\omega' - \omega\eta' = \frac{1}{2}\pi i,$$

$$f(u) \quad \text{par} \quad e^{2\omega[a-2(\eta+\eta')]} \quad \text{et} \quad e^{2\omega'[a-2(\eta+\eta')]}.$$

De là les conditions

$$b = 0, \qquad a = 2(\eta + \eta').$$

On a alors

$$f(u) = \sigma^2(\omega + \omega')\left(\frac{\sigma_2 u}{\sigma u}\right)^2 = \sigma^2(\omega + \omega')[pu - e_2];$$

$$g(u) = -\frac{\sigma\omega.\ \sigma\omega'}{\sigma(\omega + \omega')}\ \frac{\sigma_1 u\ \ \sigma_3 u}{\sigma u,\ \sigma_2 u} = -\frac{1}{2}\ \frac{\sigma\omega.\ \sigma\omega'}{\sigma(\omega + \omega')}\ \frac{p' u}{pu - e_2},$$

$$g(u) = \frac{\sigma\omega.\ \sigma\omega'}{\sigma(\omega + \omega')}\,[\zeta\omega + \zeta\omega' + \zeta u - \zeta(u + \omega + \omega')].$$

La comparaison des résultats montre que

$$g(u) = -\frac{1}{2}\ \frac{\sigma\omega.\ \sigma\omega'}{\sigma(\omega + \omega')}\ \frac{d}{du}\,\mathrm{Log} f(u).$$

(Juin 1919.)

Paris.

Epreuve théorique. — I. *Démontrer que sur la courbe générale du 3e degré, il y a, en dehors des points d'inflexion,* vingt-sept *points en chacun desquels passe une conique ayant ses* six *points de rencontre avec la courbe confondus en ce point. Établir ensuite que ces vingt-sept points sont les points de contact des tangentes menées à la courbe par les points d'inflexion de celle-ci.*

II. *Démontrer que l'inversion de l'intégrale elliptique*

$$\int_{u_0}^{u} \frac{du}{\sqrt{\mathrm{A}u^3 + \mathrm{B}u^2 + \mathrm{C}u + \mathrm{D}}} = z$$

conduit à une fonction uniforme doublement périodique $u(z)$ ayant un pôle double dans chaque parallélogramme des périodes.

En désignant par α un tel pôle, quels sont les coefficients de $\frac{1}{(z-\alpha)^2}$ et $\frac{1}{z-\alpha}$ dans le développement de $u(z)$ autour de α?

Montrer ensuite qu'on peut choisir la constante μ de manière que, en posant

$$\mathrm{H}(z) = \mu \int_{z_0}^{z} u(z)\,dz,$$

l'expression

$$e^{\int_{z_0}^{z} \Pi(z)dz}$$

soit une fonction entière *de* z. *En déduire que* $u(z)$ *peut se mettre sous la forme*

$$u(z) = \frac{G_1(z)}{G(z)},$$

$G(z)$ *et* $G_1(z)$ *étant des fonctions entières de* z, *satisfaisant à des équations de la forme*

$$G(z+\omega) = e^{az+b}G(z),$$
$$G(z+\omega') = e^{a'z+b'}G(z),$$

les a *et les* b *étant des constantes, et les* ω *les périodes de la fonction* $u(z)$.

III. *Étant donné un contour* C *et en supposant connue la fonction de Green relative à ce contour pour tout point intérieur, quelle est la formule permettant de trouver la fonction harmonique continue à l'intérieur et prenant des valeurs données sur* C ?

Appliquer le résultat au cas où le contour C *est une circonférence.*

Solution. — I. Soit la cubique prise sous la forme normale

$$x = pu, \qquad y = p'u.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que six points soient sur une conique est que les paramètres de ces six points aient une somme égale à une période, et pour qu'ils soient confondus, qu'on ait

$$6u = 2K\omega + 2K'\omega',$$
$$u = \frac{K}{6}2\omega + \frac{K'}{6}2\omega'.$$

Chacun des entiers K et K′ peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5, ce qui donne $6^2 = 36$ points.

Parmi ces points se trouvent les neuf points d'inflexion, obtenus en considérant les tangentes d'inflexion comme des

droites doubles. Il reste $6^2 - 3^2 = 27$ points de contact de véritables coniques osculatrices.

Si v est le paramètre d'un de ces points d'inflexion, on a

$$3v = \text{Période},$$

et si w est le paramètre du point de contact de l'une des trois tangentes menées par ce point, on a

$$v + 2w = \text{Période}.$$

L'élimination de v donne

$$6w = \text{Période}.$$

Les points w sont donc ceux où la conique surosculatrice a un contact de cinquième ordre.

II. La double périodicité de $u(z)$ est établie dans le *Traité d'Analyse* de M. Picard, 2e vol., p. 38 (3e édition), ainsi que l'existence d'un seul pôle double a dans un parallélogramme de périodes, pôle à résidu nul. Si l'on substitue le développement

$$u = \frac{\alpha}{(z-a)^2} + \beta + \gamma(z-a) + \ldots$$

dans la relation différentielle

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = \mathrm{A}u^3 + \mathrm{B}u^2 + \mathrm{C}u + \mathrm{D},$$

on obtient par identification

$$\alpha = \frac{4}{\mathrm{A}}.$$

Par suite

$$\mathrm{H}(z) = \int_{z_0}^{z} \mu u(z)\,dz = -\frac{4\mu}{\mathrm{A}}\frac{1}{z-a} + \text{Fonction entière de } z.$$

$\int_{z_0}^{z} \mathrm{H}(z)\,dz$ contiendra un terme logarithmique, et

$$e^{\int_{z_0}^{z} \mathrm{H}(z)\,dz}$$

contiendra le facteur $(z-a)^{-\frac{4\mu}{\mathrm{A}}}$. Cette dernière fonction

sera entière en z si $-\frac{4\mu}{A}$ est un entier positif m. D'où

$$\mu = -\frac{mA}{4}.$$

a sera un zéro d'ordre m pour l'exponentielle.

Soit $G(z)$ la valeur de $e^{\int_{z_0}^{z} H(z)\,dz}$ correspondant à $m = 2$, fonction entière qui a pour racines doubles tous les pôles de $u(z)$ et n'en admet pas d'autres. La fonction

$$G_1(z) = G(z)u(z)$$

est une fonction entière, les pôles de $u(z)$ étant les racines de $G(z)$, au même ordre 2; G et G_1 ne peuvent avoir de racines communes, G n'ayant pour racines que les pôles de u et G_1 n'admettant plus ces racines.

Par dérivation logarithmique, on obtient

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = -\int_{z_0}^{z} \frac{A}{2}\, u(z)\,dz;$$

on en déduit, ω étant l'une des périodes de $u(z)$,

$$\frac{G'(z+\omega)}{G(z+\omega)} - \frac{G'(z)}{G(z)} = -\int_{z}^{z+\omega} \frac{A}{2}\, u(z)\,dz.$$

Le second membre ne dépend pas de z, à cause de la périodicité de $u(z)$ et de la nullité de ses résidus. Soit a sa valeur constante; une intégration donne, b étant une autre constante

$$G(z+\omega) = e^{az+b}\,G(z).$$

L'autre période ω' donnerait lieu à une relation analogue.

III. La formule fondamentale demandée est

$$U(a, b) = \frac{1}{2\pi}\int_C \left(\operatorname{Log} r\,\frac{dU}{dn} - U\,\frac{d\operatorname{Log} r}{dn}\right) dS;$$

elle est établie notamment dans le *Traité* de M. Picard, 2e vol., p. 14.

Le cas où C est une circonférence y est aussi développé et

conduit à la formule

$$U(a, b) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{U(R^2 - r^2)}{R^2 - 2Rr\cos(\psi - \varphi) + r^2}\, d\psi,$$

où l'on a $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$, et où U sous le signe $\int$ est pris pour le point $(R\cos\psi, R\sin\psi)$ de la circonférence.

Épreuve pratique. — *L'intégrale elliptique de seconde espèce*

$$\int \frac{u\,du}{\sqrt{u(u-1)(u-x)}}$$

a deux *périodes qui sont fonctions de x. Former l'équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients rationnels en x, à laquelle satisfont ces périodes.*

Solution. — Considérons les intégrales

$$\Omega = \int_0^x \frac{du}{\sqrt{R}}, \qquad \Omega_1 = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{R}},$$

$$H = \int_0^x \frac{u\,du}{\sqrt{R}}, \qquad H_1 = \int_0^1 \frac{u\,du}{\sqrt{R}},$$

$$L = \int_0^x \frac{du}{(u-1)\sqrt{R}}, \qquad L_1 = \int_0^1 \frac{du}{(u-x)\sqrt{R}};$$

où $R = u(u-1)(u-x)$.

H et H_1 sont les périodes considérées.

1° On obtient par dérivation

$$2\frac{d\Omega_1}{dx} = \int_0^1 \frac{du}{(u-x)\sqrt{R}} = L_1,$$

$$2\frac{dH_1}{dx} = \int_0^1 \frac{u\,du}{(u-x)\sqrt{R}} = \Omega_1 + xL_1,$$

et l'on a identiquement

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\sqrt{R}}{u-x}\right) = \frac{u^2 - 2ux + x}{2(u-x)\sqrt{R}},$$

ou

$$H_1 - x\Omega_1 + x(1-x)L_1 = 0.$$

Éliminons Ω_1 et L_1 entre les trois relations établies; à cet effet nous leur adjoindrons :

$$2\frac{d^2H_1}{dx^2} = \frac{3L_1}{2} + x\frac{dL_1}{dx},$$

$$\frac{dH_1}{dx} = -\frac{3x-2}{2}L_1 + x(1-x)\frac{dL_1}{dx}.$$

Il vient d'abord

$$2x\frac{dH_1}{dx} = H_1 + xL_1,$$

$$\frac{dH_1}{dx} = 2(1-x)\frac{d^2H_1}{dx^2} - \frac{1}{2}L_1,$$

et enfin,

$$4x(1-x)\frac{d^2H_1}{dx^2} - 4x\frac{dH_1}{dx} + H_1 = 0.$$

2° Posons

$$u = tx, \qquad \rho = t(t-1)(tx-1).$$

Nous aurons

$$\Omega = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\rho}}, \qquad H = x\int_0^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{\rho}}, \qquad L = \int_0^1 \frac{dt}{(tx-1)\sqrt{\rho}};$$

$$2x\frac{\partial\Omega}{\partial x} + \Omega + L = 0;$$

$$2x\frac{\partial H}{\partial x} + \Omega + L - H = 0;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\sqrt{\rho}}{tx-1}\right) = \frac{t^2x - 2t + 1}{2(tx-1)\sqrt{\rho}};$$

$$H - \Omega + (x-1)L = 0;$$

$$2x\frac{d\Omega}{dx} + H + Lx = 0, \qquad 2\frac{dH}{dx} + L = 0,$$

$$\frac{dH}{dx} - \frac{d\Omega}{dx} + L + (x-1)\frac{dL}{dx} = 0;$$

$$4x(1-x)\frac{d^2H}{dx^2} - 4x\frac{dH}{dx} + H = 0.$$

On retrouve l'équation obtenue au 1°.

3° Cela devait être; car si l'on pose $x = \frac{1}{y}$, on obtient

$$H_1(x) = \sqrt{y} \int_0^1 \frac{u\,du}{\sqrt{u(u-1)(uy-1)}} = \frac{H(y)}{\sqrt{y}};$$

$$\frac{dH_1}{dx} = -\sqrt{y}\left[y\frac{dH}{dy} - \frac{1}{2}H\right];$$

$$\frac{d^2H_1}{dx^2} = \sqrt{y}\left[y^3\frac{d^2H}{dy^2} \pm y^2\frac{dH}{dy} - \frac{1}{4}yH\right]:$$

Multiplions ces égalités respectivement par 1, $-4x = -\frac{4}{y}$, $4x(1-x) = \frac{4(y-1)}{y^2}$,

et ajoutons membre à membre; il vient :

$$4x(1-x)\frac{d^2H_1}{dx^2} - 4x\frac{dH_1}{dx} + H_1$$
$$+\sqrt{y}\left[4y(1-y)\frac{d^2H}{dy^2} - 4y\frac{dH}{dy} + H\right] \equiv 0.$$

Donc $H_1(x)$ et $H(y)$ vérifient la même équation différentielle. (Juin 1919.)

Épreuve théorique. — I. *Soit* $F(z)$ *une fonction holomorphe dans une aire limitée par un contour* C, *et un point* z_0 *à l'intérieur de cette aire. On désigne par* M *le maximum de* $|F(z)|$ *sur* C. *Montrer que l'on a*

$$|F(z_0)| < M.$$

Si l'on avait $|F(z_0)| = M$, *que pourrait-on dire de la fonction* $F(z)$?

II. *Soit* $f(x)$ *une fonction continue de la variable réelle* x *dans l'intervalle* (a, b). *Cette fonction peut-elle satisfaire aux conditions en nombre infini*

$$\int_a^b f(x)x^n\,dx = 0,$$

n *prenant les valeurs entières* 0, 1, 2, ..., ∞?

III. ω *et* ω' *étant deux constantes complexes, telles que*

dans le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$, *le coefficient de i soit positif, trouver toutes les fonctions* $\Theta(z)$, *holomorphes dans tout le plan telles que :*

$$\Theta(z+\omega)=\Theta(z), \qquad \Theta(z+\omega')=e^{-\frac{\pi i}{\omega}(2z+\omega')}\Theta(z).$$

Le réseau de parallélogrammes correspondant à ω *et* ω' *étant construit, combien l'équation* $\Theta(z)=0$ *a-t-elle de racines dans un parallélogramme?*

IV. - *Soit dans le plan* xOy, *un arc de courbe* AB, *correspondant à la relation*

$$y=f(x) \qquad (a<x<b),$$

montrer par un exemple qu'il existe des fonctions analytiques de $z=x+iy$, *définies d'un côté de la courbe* AB *mais ne pouvant pas être prolongées analytiquement au delà de cette ligne.*

Solution. — I. La propriété est une conséquence de la formule de Cauchy :

$$F(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{F(z)\,dz}{z-z_0}.$$

Si l est la longueur de C et δ la moindre distance de z_0 à C, on a $|F(z_0)|\leqq\frac{Ml}{2\pi\delta}$, et *a fortiori* $|F(z_0)|<M$.

Si $|F(z_0)|=M$, la fonction $F(z)$ est constante à l'intérieur de C; si elle ne l'était pas, son module, dans un cercle suffisamment petit, de centre z_0, serait inférieur à M; et la valeur de $|F(z_0)|$, égale au module de la valeur moyenne de $F(z)$ dans ce cercle, ne saurait être M.

II. Les conditions admises entraînent évidemment la relation

$$\int_a^b f(x)P(x)\,dx=0 \qquad (b>a),$$

$P(x)$ étant un polynome de degré quelconque. Supposons que ce polynome soit celui qui, dans l'intervalle (a, b) diffère de $f(x)$, en module, de moins de ε, ε étant un nombre positif,

donné à l'avance aussi petit qu'on veut, soit $P(x, \varepsilon)$. Nous aurons

$$\int_a^b P^2(x, \varepsilon)\,dx = \int_a^b P(x, \varepsilon)[P(x, \varepsilon) - f(x)]\,dx$$
$$< \varepsilon \left| \int_a^b P(x, \varepsilon)\,dx \right|.$$

Faisons tendre ε vers zéro. Si $P(x, \varepsilon)$ ne tendait pas vers zéro, nous aurions une contradiction. Donc $f(x)$ est égal à zéro dans l'intervalle (a, b).

III. Soit $\varphi(z) = \operatorname{Log}\Theta(z)$; les zéros d'une fonction entière $\Theta(z)$ [s'il en existe] sont, d'après les relations de condition, distribués périodiquement dans le plan; soient $a_1 \ldots a_n$ leurs arguments dans le parallélogramme (ω, ω'). On a

$$2\pi i n = \int d\varphi(z), \qquad 2\pi i \sum a = \int z\, d\varphi(z),$$

les intégrales étant prises dans le sens direct le long d'un parallélogramme (ω, ω'). On obtient immédiatement :

$$n = 1, \qquad a = \frac{\omega + \omega'}{2} + \text{Période}.$$

Considérons alors la fonction

$$\Theta_1(z) = e^{Az^2 + Bz}\,\sigma\left(z - \frac{\omega + \omega'}{2}\right),$$

la fonction σ étant construite avec les périodes (ω, ω'); elle a le zéro de Θ et se reproduit multipliée par une exponentielle linéaire en z. Voyons s'il est possible de déterminer les coefficients A et B de manière que $\Theta_1(z)$ satisfasse aux conditions proposées. Nous obtenons les relations

$$\eta + A\omega = 0,$$
$$\eta' + A\omega' = -\frac{\pi i}{\omega},$$
$$-\eta\omega' + \pi i + A\omega^2 + B\omega = 0,$$
$$-\eta'\omega + \pi i + A\omega'^2 + B\omega' = -\frac{\pi i \omega'}{\omega}.$$

Comme $\eta\omega' - \eta'\omega = \pi i$, ces relations sont compatibles et

donnent

$$A = -\left(\frac{\eta}{\omega} + \frac{\eta'}{\omega'} + \pi i\right), \qquad B = \eta + \eta'.$$

La fonction $\frac{\Theta}{\Theta_1}$ est une fonction elliptique sans pôle et se réduit à une constante C. Donc

$$\Theta(z) = Ce^{-\left(\frac{\eta}{\omega} + \frac{\eta'}{\omega'} + \frac{\pi i}{\omega\omega'}\right)\frac{z^2}{2} + (\eta + \eta')z}\,\sigma\left(u - \frac{\omega + \omega'}{2}\right).$$

La symétrie est apparente, η et η' ne jouant pas des rôles symétriques; le coefficient de z^2 est $-\frac{\eta}{\omega}$.

IV. Considérons la série

$$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{a_n - z},$$

dans laquelle : 1° les coefficients A_n sont tels que la série

$$\sum |A_n|$$

soit absolument convergente; 2° les points $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sont distribués sur l'arc AB de manière que, sur toute portion finie de cet arc, il y en ait une infinité.

$\varphi(z)$ est convergente en tout point non situé sur AB et représente une fonction holomorphe dans le domaine de ce point; mais le cercle de convergence relatif à ce point ne peut jamais contenir une portion de l'arc AB, si petite soit-elle. D'où l'impossibilité du prolongement analytique de $F(z)$ à travers la moindre portion de AB (*Cf.* Goursat, *Cours d'Analyse mathématique*, t. II, 2e éd., p. 252-253).

Épreuve pratique. — *Dans le plan* xOy *on considère la moitié supérieure du cercle de centre* O *et de rayon* un *situé au-dessus de* Ox. — 1° *Résoudre pour cette aire, le problème de Dirichlet, les valeurs données pour la fonction harmonique étant* zéro *pour le diamètre* AB *et* un *pour la demi-circonférence* ACB (*on pourra chercher à mettre la solution sous forme trigonométrique*).

2° *Quand le point* $M(x, y)$ *tend vers* B *suivant une direc-*

tion telle que MBO $= \alpha$, *quelle est en* B *la limite de la fonction harmonique?*

Solution. — 1° Le développement de Fourier

$$U = a_0 + \sum_1^\infty (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^n,$$

nul pour $\theta = 0$ ou π quel que soit r compris entre 0 et 1, se réduit à

$$U = \sum_1^\infty b_n \sin n\theta r^n$$

Comme on doit avoir sur la demi-circonférence $U = 1$ et $r = 1$,

$$1 = \sum_1^\infty b_n \sin n\theta.$$

Or on sait que

$$\frac{\pi}{4} = \sum_0^\infty \frac{\sin(2p+1)\theta}{2p+1}.$$

Il vient donc

$$U = \frac{4}{\pi} \sum_0^\infty \frac{r^{2p+1} \sin(2p+1)\theta}{2p+1} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{2r\sin\theta}{1-r^2}\right).$$

2° Quand le point M se déplace suivant la direction MB, on a

$$r = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\theta)},$$

$$U = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tang}\left[\frac{2\sin\alpha\sin(\alpha+\theta)\sin\theta}{\sin^2(\alpha+\theta) - \sin^2\alpha}\right].$$

Si l'on fait tendre θ vers zéro, l'argument a pour limite $\operatorname{tang}\alpha$, donc

$$U_B = \frac{2\alpha}{\pi}.$$

On obtient 0 et 1 si l'on tend vers B en suivant le diamètre OB et la circonférence CB. (Octobre 1919.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSEES.

2317.

(1917, p. 199.)

Sur la symétrique d'une tangente quelconque à une parabole, par rapport au foyer, il y a trois points P_1, P_2, P_3 *dont les distances* P_1M_1, P_2M_2, P_3M_3 *à la courbe sont respectivement égales à leurs distances* P_1F, P_2F, P_3F *au foyer. Démontrer que les points* M_1, M_2, M_3, F *sont concycliques.* R. Goormaghtigh.

Solution

Par M. R. Bouvaist.

Une inversion de centre F transforme la proposition à démontrer en la suivante :

Soient F *le point de rebroussement d'une cardioïde* (Γ), *m le centre d'un cercle passant par* F *et tangent à* (Γ), *m' le symétrique de m par rapport à* F, *les contacts des trois tangentes à* (Γ) *issues de m' sont en ligne droite.*

Soit A le second point d'intersection de (Γ) avec son axe, O le milieu de FA. Γ est la podaire par rapport à F du cercle de diamètre FA, ou encore l'enveloppe des cercles (m) passant par F et ayant leurs centres m_1 sur le cercle de diamètre FO. Soit m_1 un point de ce cercle tel que $FOm_1 = \frac{\pi}{6}$; le cercle (m_1) touchera son enveloppe en B_1, la droite m_1A_1 étant parallèle à AF; B_1 est un contact de Γ avec sa bitangente; B_2 étant le symétrique de B_1 par rapport à AF, le cercle FB_1B_2 sera symétrique du cercle de diamètre FO par rapport à F. Or le lieu des points d'où l'on peut mener à une quartique tricuspidale trois tangentes ayant leurs contacts en ligne droite est la conique passant par les rebroussements et les contacts de la courbe avec sa bitangente. Pour Γ c'est donc le cercle FB_1B_2, ce qui démontre la proposition.

Autres solutions par MM. P. Carissan, J. Lemaire, L. Maloue, un *Abonné*.

La solution de M. J. Lemaire contient des développements intéressants, que le manque de place ne nous permet pas de publier *in extenso*. Nous indiquons seulement les théorèmes suivants qu'il rattache à la question 2317 :

1° *Le cercle passant au point de rebroussement d'une cardioïde, et aux deux points où cette courbe est rencontrée par une tangente variable, coupe la tangente de rebroussement en un second point fixe.*

2° *Les trois tangentes, menées à la cardioïde d'un point* A *quelconque du cercle passant par un point de rebroussement et aux points de contact* I *et* J *de la tangente double, ont leurs points de contact sur une même droite* (γ).

3° *Cette droite et la tangente au quatrième point* m_4 *où elle coupe la cardioïde partagent harmoniquement le segment* IJ.

4° *Si* E *est la trace, sur la tangente double, de cette quatrième tangente,* FE *et* FA *sont symétriques par rapport à la tangente de rebroussement.*

5° E *désignant le point commun aux droites* (d) *et* (γ), *le cercle déterminé par le second point où* FE′ *coupe le cercle* FIJ, *par* m_4, *et par le point de rebroussement* F, *touche en ce point la tangente de rebroussement.*

Par une transformation homographique qui permute les points cycliques et les points I et J où la cardioïde touche sa tangente double, cette courbe se transforme en une hypocycloïde à trois rebroussements : des théorèmes ci-dessus, on déduit alors les suivants :

1° *La conique déterminée par les rebroussements d'une hypocycloïde à trois rebroussements, et par les deux points où cette courbe est coupée par une quelconque de ses tangentes, a un quatrième point fixe, qui est le point de concours des tangentes de rebroussement.*

2° *Les trois tangentes menées à une hypocycloïde à trois rebroussements, d'un point* A *quelconque du cercle des rebroussements, ont leurs points de contact sur une droite* (γ).

3° *Cette droite* (γ) *est normale à l'hypocycloïde au quatrième point où elle rencontre cette courbe.*

4° F *désignant l'un quelconque des points de rebroussement*, FA *et la tangente à l'hypocycloïde au pied de la normale* (γ) *ont des directions symétriques par rapport à la tangente de rebroussement correspondante.*

5° *La conique tangente à une hypocycloïde en un point de rebroussement* F, *et passant par les deux autres et par un autre point quelconque* m_4 *de cette courbe, coupe le cercle des rebroussements à l'extrémité de la corde menée par* F *parallèlement à la normale en* m_4 *à l'hypocycloïde.*

Ces théorèmes s'étendraient à toute courbe de troisième classe ayant une tangente double, et l'on en déduirait, par transformation corrélative, des propriétés des cubiques à point double.

2318.

(1917, p. 199.)

Démontrer que le rayon vecteur OM, *d'un point d'une cissoïde droite ayant* O *pour point de rebroussement et la perpendiculaire à l'asymptote menée par le centre de courbure correspondant à* M *se coupent sur une parallèle à l'asymptote. En déduire une construction du centre de courbure en un point d'une cissoïde.* F. Balitrand.

Solution
Par M. M. Faucheux.

Soit OP la perpendiculaire abaissée de O sur l'asymptote Δ. Les équations paramétriques de la cissoïde sont

$$x = \frac{t^2}{1+t^2},$$
$$y = \frac{t^3}{1+t^2}.$$

Il est facile de former l'équation de la normale

$$t(t^2+3)y + 2x = t^2(t^2+2).$$

Le centre de courbure γ est à l'intersection de la normale et de la droite $y = \frac{4}{3}t$ qui est perpendiculaire à Δ et coupe

OM au point S′ d'abscisse $x = \frac{4}{3}$, c'est-à-dire sur une parallèle Δ′ à Δ facile à construire.

Soient C le milieu de OP, R, S les intersections de OM avec le cercle de diamètre OP et avec Δ. Construisons les rectangles CPSF, OPSG. Les triangles GMS et PRO sont egaux; MFS est isoscèle, et si E est le symétrique de C par rapport à O, FMOE est un trapèze isoscèle; si l'on abaisse EK perpendiculaire à MF

$$MF = OE = OC = MK,$$

et la cissoïde est le lieu du milieu de KF, l'angle droit EKF se déplaçant de façon que KE passe par le point fixe E et que KF conserve une longueur constante, F se déplaçant sur la droite fixe CF. Le centre instantané I se trouve à l'intersection de FG et de la parallèle à KF menée par E, MI est la normale à la cissoïde; d'où la construction :

Mener par S la parallèle à l'axe, par E la parallèle à CR; l'intersection est le point I; γ est l'intersection de MI et de la parallèle à l'axe menée par S′.

Autres solutions par MM. R. Bouvaist, J. Lemaire, L. Maloue; J. Rose.

2320.

(1917, p. 200).

Soit M *un point d'une cubique nodale, la polaire de* M *par rapport aux tangentes au point double et la tangente en* M *à la courbe se coupent en* P, *les trois tangentes menées de* P *à la cubique ont leurs points de contact en ligne droite, et cette droite enveloppe la conique inscrite dans le triangle des tangentes d'inflexion et qui touche les tangentes au point double. Proposition corrélative.*

R. Bouvaist.

Solution
Par un *Abonné*.

On doit à M. Delens le théorème suivant (*J. M. S.* de De Longchamps, 1892, p. 195) :

La normale en un point quelconque d'une hypocycloïde

à trois rebroussements rencontre cette courbe en trois autres points pour lesquels les tangentes vont concourir sur la circonférence qui lui est circonscrite.

En le généralisant par homographie et le transformant ensuite par dualité, on retrouve l'énoncé de la question **2320**. La proposition directe et sa corrélative sont donc démontrées

Autre solution par M. J. Lemaire.

QUESTIONS.

2443. Dans le plan, deux triangles inversement semblables sont orthologiques.

R. B.

2444. Si deux hyperboles équilatères concentriques H, H′ sont telles qu'il existe des triangles (T) inscrits à H et circonscrits à H′, le cercle circonscrit à un triangle (T) est le cercle conjugué du triangle (T′) qui a pour sommets les points de contact des côtés de (T) avec H′.

C. Convers.

[A5b]

SUR UN DÉFAUT DE LA MÉTHODE D'INTERPOLATION PAR LES POLYNOMES DE LAGRANGE ;

PAR M. MAURICE FRÉCHET.

(Université de Strasbourg.)

INTRODUCTION.

1. Le procédé qui consiste à représenter approximativement une fonction $y = f(x)$ par un polynome P_n de degré n égal à la fonction donnée pour $n+1$ valeurs de la variable, n'est pas à l'abri de toute critique.

Méray a fait remarquer que rien ne prouvait que ce procédé fût légitime. Runge, en poussant les calculs sur un des exemples simples donnés par Méray, celui de la fonction $\frac{1}{1+x^2}$, Borel, par une méthode toute différente, ont montré que la multiplication indéfinie des points où la fonction $f(x)$ et le polynome $P_n(x)$ coïncident n'entraîne pas la convergence de $P_n(x)$ vers $f(x)$ aux autres points.

2. Un autre défaut du même procédé a été remarqué par de la Vallée Poussin : c'est *d'exagérer l'influence des erreurs d'observation*. Autrement dit, si les valeurs $y_0+\varepsilon_0$, $y_1+\varepsilon_1$, ..., $y_n+\varepsilon_n$ utilisées pour déterminer $P_n(x)$ aux points x_0, x_1, ..., x_n ne sont égales aux valeurs correspondantes y_0, y_1, ..., y_n de $f(x)$ qu'à une certaine approximation près, il en résulte pour la valeur de $P_n(x)$, en un point différent des précédents, une

erreur qui peut devenir, pour des valeurs assez grandes de n, beaucoup plus grande que cette approximation.

3. Toutefois, il faut remarquer que si cette circonstance ne se produisait qu'en des points isolés ou dans des intervalles dont la longueur totale tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, ce défaut de la méthode ne serait pas très grave. (Il pourrait, par exemple, ne présenter aucun inconvénient pour l'intégration.)

Le but de cette Note est de montrer qu'il n'en est pas ainsi, de compléter par conséquent la remarque de la Vallée Poussin en prouvant que l'exagération de l'influence des erreurs d'observation qui d'après lui a au moins lieu en un point (et par suite dans un petit intervalle) peut se présenter effectivement *dans une suite d'intervalles dont la longueur totale peut devenir et rester aussi voisine qu'on voudra de la moitié de la longueur de l'intervalle d'interpolation*, à partir d'un nombre d'observations suffisamment grand.

4. Avant de passer à la démonstration, il y a lieu de remarquer que les défauts signalés par Méray et par de la Vallée Poussin présentent un champ d'application très différent. Pour rencontrer la singularité de Méray, il faut s'adresser à une fonction $f(x)$ elle-même singulière.

Il faut supposer au moins que $f(x)$ n'est pas holomorphe dans un certain intervalle comprenant l'intervalle d'interpolation. Au contraire, la singularité de la Vallée Poussin (et c'est ce qui en fait la gravité) est *indépendante de la fonction* $f(x)$ qu'il s'agit de représenter.

On fait disparaître le premier défaut en n'appliquant la méthode qu'à des fonctions $f(x)$ suffisamment régu-

lières. On ne peut espérer faire disparaître le second qu'en choisissant convenablement les points $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ce serait une question intéressante à étudier. (On sait déjà, grâce à Tchebicheff, qu'il y a avantage dans certains cas à utiliser comme points de base dans la méthode d'interpolation appliquée à un intervalle (a, b) les points

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n+1}.$$

CALCUL DE L'EFFET DES ERREURS D'OBSERVATION.

5. Le polynome de degré n, $P_n + \Delta P_n$, qui prend aux points x_i les valeurs $y_i + \varepsilon_i$, est

$$P_n + \Delta P_n = \sum_{i=0}^{i=n} (y_i + \varepsilon_i) Q_n^i(x),$$

avec

$$Q_n^i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}$$

et l'erreur ΔP_n que l'on commet sur P_n en remplaçant les y_i par les $y_i + \varepsilon_i$ est la somme d'erreurs ΔP_n^i dues chacune à une seule erreur ε_i avec

$$\Delta P_n^i(x) = \varepsilon_i Q_n^i(x).$$

On voit que l'erreur ΔP_n^i due à l'erreur ε_i est bien, comme nous l'avons fait remarquer, indépendante de la fonction $f(x)$.

6. Nous allons nous placer avec de la Vallée Poussin dans le cas classique des ordonnées équidistantes en supposant pour simplifier $a = 0$, $b = 1$. Si une des observations est faite en un point X, l'abscisse de ce point est une fraction dont le dénominateur est un diviseur de n quand on réduit la fraction à sa plus simple

expression

$$X = \frac{i'}{n'} = \frac{2i'}{2n'} = \frac{3i'}{3n'} = \ldots = \frac{i}{n} = \ldots.$$

Soit ε l'erreur commise sur $f(X)$ (ε serait appelé ε_i dans nos précédentes notations).

Nous allons évaluer l'erreur $\Omega(x) = \Delta P_n^{(i)}(x)$ qui résulte de l'erreur ε et affecte la valeur de $P_n(x)$ en un point x intérieur à l'un des intervalles de base. Nous supposons donc

$$\frac{k-1}{n} < \frac{k-1}{n} + \frac{\omega}{2n} \leqq x \leqq \frac{k}{n} - \frac{\omega}{2n} < \frac{k}{n} \quad \text{avec } 0 < \omega < 1.$$

Pour fixer les idées, supposons que X soit dans la moitié de gauche de l'intervalle de variation et que x soit à droite de X. Il en résulterait $0 \leqq X \leqq \frac{1}{2}$ ou $0 \leqq i \leqq \frac{n}{2}$ et $i \leqq k-1$. Il nous sera même plus commode de supposer exclus les signes d'égalité et par suite de supposer que

$$0 < i < \frac{n}{2}, \quad i < k-1.$$

7. Nous avons alors à évaluer

$$\Omega(x) = \varepsilon Q_n^{(i)}(x)$$
$$= \varepsilon \frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(x-\frac{i-1}{n}\right)\left(x-\frac{i+1}{n}\right)\cdots(x-1)}{\frac{i}{n}\,\frac{i-1}{n}\cdots\frac{1}{n}\left(\frac{-1}{n}\right)\cdots\left(\frac{i-n}{n}\right)}.$$

Or on a

$$x > \frac{k-1}{n}, \quad x - \frac{1}{n} > \frac{k-2}{n}, \quad \ldots, \quad x - \frac{i-1}{n} > \frac{k-i}{n},$$
$$x - \frac{i+1}{n} > \frac{k-i-2}{n}, \ldots, x - \frac{k-2}{n} > \frac{1}{n}, \; x - \frac{k-1}{n} \geqq \frac{\omega}{2n},$$
$$\frac{k}{n} - x \geqq \frac{\omega}{2n}, \; \frac{k+1}{n} - x > \frac{1}{n}, \quad \ldots, \quad 1 - x > \frac{n-k}{n};$$

d'où

$$|\Omega(x)| > \varepsilon \frac{\frac{k-1}{n}\,\frac{k-2}{n}\cdots\frac{k-i}{n}\,\frac{k-i-2}{n}\cdots\frac{1}{n}\,\frac{\omega}{2n}\,\frac{\omega}{2n}\,\frac{1}{n}\cdots\frac{n-k}{n}}{\frac{i}{n}\,\frac{i-1}{n}\cdots\frac{1}{n}\,\frac{1}{n}\cdots\frac{n-i}{n}}$$

$$= \frac{\varepsilon\omega^2}{4(k-i-1)}\,\frac{(k-1)!\,(n-k)!}{i!\,(n-i)!}.$$

Nous voulons démontrer que, quels que soient $\varepsilon > 0$ et ω compris entre 0 et 1, on peut prendre n assez grand pour que

$$|\Omega(x)| > \varepsilon A,$$

A étant un nombre positif donné d'avance.

Il suffit d'obtenir

$$\frac{1}{i(k-i-1)}\,\frac{(k-1)!}{(i-1)!}\,\frac{(n-k)!}{(n-i)!} > \frac{4A}{\omega^2}.$$

Or :

$$\frac{(k-1)!}{(i-1)!}\,\frac{(n-k)!}{(n-i)!} = \frac{i}{n-i}\,\frac{i+1}{n-i-1}\cdots\frac{(k-1)}{n+1-k};$$

les valeurs successives des fractions du second membre vont évidemment en croissant à partir d'une valeur inférieure à 1 puisque $i < \frac{n}{2}$; elles ne pourront dépasser l'unité que si $k-1 > n+1-k$ ou $k-1 > \frac{n}{2}$. Si l'on veut obtenir une valeur suffisamment grande du premier membre, il faudra donc que l'on ait d'abord $k-1 > \frac{n}{2}$, c'est-à-dire que x soit à droite du milieu de l'intervalle de variation.

Mais observons que si l'on change j en $n-j$, $\frac{j}{n-j}$ prend une valeur inverse $\frac{n-j}{j}$; donc tant que $k-1$ ne dépassera pas la valeur $n-i$, le second membre ne dépassera pas la valeur 1, celles de ses fractions qui

sont plus grandes que l'unité n'étant que les inverses de certaines des fractions précédentes.

Il faut donc supposer non seulement $k-1>\frac{n}{2}$, mais encore au moins $k-1>n-i$, c'est-à-dire que x doit être plus éloigné que X du milieu de l'intervalle $(0, 1)$. Ceci étant, on aura

$$(1)\quad |\Omega(x)|>\frac{\varepsilon\omega^2}{4i(k-i-1)}\,\frac{n-i+1}{i-1}\,\frac{n-i+2}{i-2}\cdots\frac{k-1}{n+1-k},$$

d'où

$$(2)\qquad |\Omega(x)|>\frac{\varepsilon\omega^2}{4i(n-i)}\left(\frac{n-i}{i}\right)^{k-n+i-1}$$

$$=\frac{\varepsilon\omega^2}{4}\,\frac{1}{(n-i)^2}\left(\frac{n-i}{i}\right)^{k-n+i}$$

ou

$$|\Omega(x)|>\frac{\varepsilon\omega^2}{4}\,\frac{1}{(1-X)^2}\,\frac{1}{n^2}\left[\left(\frac{1-X}{X}\right)^{\frac{k}{n}-1+\frac{i}{n}}\right]^n.$$

La quantité $\frac{1-X}{X}$ est une quantité donnée supérieure à l'unité puisque $X<\frac{1}{2}$. Si donc $\frac{k}{n}-1+\frac{i}{n}$ est supérieure à une quantité positive α, on aura

$$|\Omega(x)|>\frac{\varepsilon\omega^2}{4}\,\frac{1}{(1-X)^2}\,\frac{1}{n^2}\left[\left(\frac{1-X}{X}\right)^{\alpha}\right]^n$$

et par suite, quand ε, ω, X, α sont donnés, le second membre peut devenir supérieur à toute quantité donnée A en prenant n assez grand.

8. Toutefois, récapitulons les conditions d'inégalité que nous avons été conduit à adopter :

$$0<i<\frac{n}{2},\quad i<k-1,\quad n-i<k-1,\quad \frac{k}{n}-1+\frac{i}{n}>\alpha$$

ou

$$0 < i < \frac{n}{2} \quad \text{et} \quad k > i + 1; \quad k > n - i + 1, \quad k > n - i + n\alpha.$$

Si l'on prend n assez grand pour que $n\alpha > 1$, on a

$$i + 1 < n - i + 1 < n - i + n\alpha;$$

il reste donc les conditions

$$0 < i < \frac{n}{2} \quad \text{et} \quad k > n - i + n\alpha \quad \text{avec} \quad n\alpha > 1.$$

Puisque $X = \frac{i}{n}$ et $k > nx$, il suffira d'écrire

$$0 < X < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x > 1 - X + \alpha \quad \text{avec} \quad n > \frac{1}{\alpha}.$$

Ceci suppose (pour que $x < 1$) que l'on a $\alpha < X$.

Donc, enfin, en choisissant pour α un nombre quelconque inférieur à X, on aura

$$|\Omega(x)| > \varepsilon A$$

pour

$$x > 1 - (X - \alpha), \quad n > \frac{1}{\alpha} \quad \text{et} \quad n > n_0,$$

n_0 étant tel que

$$\frac{1}{n^2}\left[\left(\frac{1 - X}{X}\right)^{\alpha}\right]^n > \frac{4(1 - X)^2}{\omega^2} A \quad \text{pour} \quad n > n_0.$$

Ceci suppose en outre que les distances de x aux extrémités de l'intervalle de base où il est situé sont supérieures à $\frac{\omega}{2n}$.

9. Nous avons donc montré que pour ε, A, ω (< 1) et α ($< X$) donnés, on a $[\Omega(x)] > \varepsilon A$ non seulement en un point, mais dans l'intérieur de un ou plusieurs intervalles de longueurs $\frac{1 - \omega}{n}$. Quelle est la somme

des longueurs de ces intervalles? Elle est au moins égale à $p\left(\frac{1-\omega}{n}\right)$ si p est le nombre des intervalles de longueur $\frac{1}{n}$ qui suivent l'intervalle de base comprenant le point

$$1-(X-\alpha).$$

Alors

$$s > p\frac{(1-\omega)}{n} \quad \text{avec} \quad \frac{n-p-1}{n} = 1-(X-\alpha) < \frac{n-p}{n}$$

ou

$$\frac{p}{n} \geqq X-\alpha-\frac{1}{n} > X-2\alpha,$$

d'où

$$s > (1-\omega)(X-2\alpha).$$

Ainsi si l'on prend $\alpha < \frac{X}{2}$, on aura

$$\Omega(x) > \varepsilon A$$

dans un ensemble d'intervalles de longueur totale supérieure à $(1-\omega)(X-2\alpha)$ dès que n sera suffisamment grand $\left(n > n_0 \text{ et } n > \frac{1}{\alpha}\right)$, cette valeur de n étant d'ailleurs indépendante du choix de x dans ces intervalles. On voit que si par exemple on prend ω très voisin de 0, X très voisin de $\frac{1}{2}$ (mais plus petit) et α positif mais très petit, la longueur totale de ces intervalles, tous à droite de $\frac{1}{2}$, sera très voisine de $\frac{1}{2}$.

10. Il en résulte bien qu'une erreur aussi minime qu'on le veut sur la valeur employée pour y en l'un X des points de base pourra produire sur le polynome d'interpolation $P_n(x)$ une erreur aussi grande que l'on veut et cela non pas pour des points particuliers de l'intervalle d'interpolation comme l'a montré de la

Vallée Poussin, mais pour un ensemble d'intervalles de longueur totale finie, plus grande à partir d'une certaine valeur de n que les $\frac{2}{3}$ de l'intervalle total, par exemple.

Le raisonnement précédent, non seulement établit notre proposition, mais il donne le moyen de déterminer une valeur de n à partir de laquelle le résultat prévu sera atteint. Cette valeur sera d'autant plus grande qu'on voudra mettre en évidence une inexactitude plus marquée de P_n dans une somme d'intervalles plus étendue.

11. Si l'on voulait faire le calcul effectif de n, il y aurait d'ailleurs avantage à employer pour l'évaluation des factorielles un procédé moins élémentaire, mais aussi moins grossier que celui qui fait passer de l'inégalité (1) à l'inégalité (2).

Il serait intéressant de tracer un graphique représentant $\Omega(x)$ pour les premières valeurs de n. Par exemple on prendrait $X = \frac{1}{3}$ et $n = 3, 6, 9, 12, 15$.

[P2b]

TRANSFORMATION POLAIRE INTERAXIALE;

PAR M. M. D'OCAGNE.

1. Étant donnés deux axes parallèles, pris dans un certain ordre, Δ_1 et Δ_2, si une droite quelconque de leur plan coupe le premier au point L et le second au point M, et si, par une rotation, directe ou rétrograde, de 90° autour du point L, on amène le point M en P,

ce point P est dit le *pôle interaxial*, direct ou rétrograde, de la droite LM, par rapport aux axes Δ_1 et Δ_2. Sur la figure 1 le pôle P de la droite LM est rétrograde.

Inversement, la droite LM est dite la *polaire interaxiale*, rétrograde dans le premier cas, directe dans le second, du point P par rapport aux mêmes axes. Cette dernière convention, relative au sens de la polarité de la droite sera justifiée par la suite. Dès maintenant elle peut être regardée comme se rattachant au mode de construction de la polaire LM lorsque le point P est donné. Il suffit, pour obtenir cette construction, d'abaisser de P et de M les perpendiculaires PI et MH sur Δ_1. L'égalité évidente des triangles rectangles HML et ILP (résultant de l'égalité des hypoténuses ML et LP, ainsi que des angles en M et en L) montre que HM = IL, et, par suite, que IJ = IL, ce qui prouve que le point L est un pôle interaxial de la droite IJ; mais, en outre, la figure montre que, alors que le point P est un pôle rétrograde de LM, L est un pôle direct de IJ, ce qui conduit bien, dans ce cas, à appliquer cette épithète de directe à la polaire LM pour le point P. On verrait de même que, pour le pôle direct de LM, le point L serait pôle rétrograde de la droite IJ correspondante, et, en ce cas, LM serait dite *polaire rétrograde* de P.

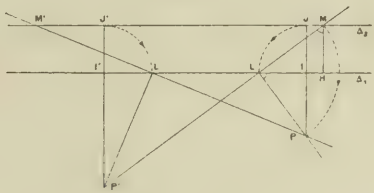
Dans un cas comme dans l'autre, une fois le point L déterminé sur Δ_1, on n'a plus qu'à mener par L une perpendiculaire à PL pour avoir la polaire demandée.

2. Ce qui confère à cette notion spéciale tout son intérêt, c'est qu'elle donne naissance à une transformation *dualistique* en raison de cette propriété fondamentale que, *si sur la polaire directe du point* P *on prend un point* P′ *quelconque, la polaire rétrograde de* P′ *passe par* P. Et de même, bien entendu, *mutatis*

mutandis, si l'on échange les qualificatifs de *direct* et de *rétrograde*.

Pour le démontrer, il suffit de remarquer que, si L'M' est la polaire directe de P' (*fig.* 1), l'égalité en grandeur

Fig. 1.



des segments IL et I'L' montre que le point L' est le second point de rencontre de Δ_1 et du cercle décrit sur PP' comme diamètre (lequel passe par L), et, par suite, que la perpendiculaire L'M' élevée en L' à P' passe par P.

Si donc, lorsque le point P décrit une courbe quelconque Γ, sa polaire (directe ou rétrograde) LM a pour enveloppe une courbe Γ' qu'elle touche au point P'; inversement la polaire (rétrograde ou directe) L'M' de P' a pour enveloppe la courbe Γ qu'elle touche au point P.

Nous dirons que les courbes Γ et Γ' sont polaires *interaxiales* l'une de l'autre, ce qui établit entre elles une quasi-réciprocité, mais non une réciprocité véritable (seulement réalisée, comme on sait, parmi les transformations dualistiques du plan, par la transformation polaire réciproque relativement à une conique), attendu que si l'une est directe pour la seconde, celle-ci est rétrograde pour la première.

On saisit maintenant pleinement la raison de la convention de langage introduite ci-dessus au sujet du sens de la polaire. On voit, en effet, que, grâce à cette

convention, on peut dire que *si la courbe* Γ' *est l'enveloppe des polaires directes des points de la courbe* Γ, *elle est en même temps le lieu des pôles directs des tangentes de cette courbe* Γ.

Avant d'aller plus loin, remarquons que la propriété fondamentale qui vient d'être démontrée permet de déterminer d'une façon précise la polaire du point à l'infini dans une direction donnée. Si, en effet, la droite LM se déplace en restant parallèle à cette direction, on voit immédiatement, puisque le vecteur LP est alors constant en grandeur et direction, que *le lieu du point* P *est une droite parallèle aux axes*. Par suite aussi, toutes les polaires des points à l'infini étant parallèles aux axes, on peut dire que *le pôle de la droite à l'infini du plan est le point à l'infini dans la direction des axes*. On peut observer, d'après cela, que la droite à l'infini du plan est la seule sur laquelle se trouve son propre pôle.

Comme conséquence de ce qui précède, on peut déduire que *les asymptotes de chacune des courbes* Γ *et* Γ' *ont pour pôles* (compte tenu du sens) *les points de contact des tangentes à l'autre parallèles aux axes*.

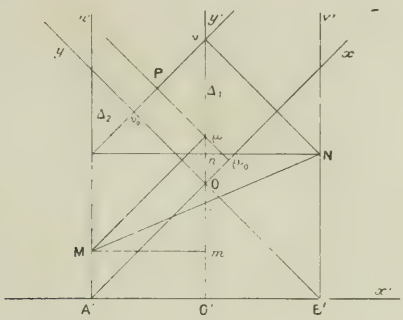
3. De ce que la transformation polaire interaxiale est dualistique, il résulte immédiatement qu'elle jouit de toutes les propriétés que comporte, sous sa forme la plus générale, l'application du principe de dualité : conservation des rapports anharmoniques, conservation du genre, interversion des nombres de Plücker et, notamment, de l'ordre et de la classe des courbes Γ et Γ', etc.

Il suit, entre autres, de là que la polaire interaxiale d'une conique est une conique.

Nous allons d'ailleurs indiquer une interprétation analytique remarquablement simple de la transformation ici envisagée.

Supposons la courbe Γ' rapportée à des axes parallèles $A'u'$ et $B'v'$ perpendiculaires à l'axe $A'B'$ des origines (*fig.* 2). Autrement dit, définissons chacune des

Fig. 2.



tangentes MN de cette courbe Γ' par ses coordonnées parallèles $A'M = u'$, $B'N = v'$, avec lesquelles, comme on sait [1], toute courbe de classe m a une équation algébrique et entière de degré m.

A ces axes $A'u'$ et $B'v'$, lions en outre, comme d'habitude, les axes cartésiens $O'x'$ et $O'y'$ tels que, O' étant le milieu de $A'B'$, $O'x'$ soit dirigé suivant $A'B'$ (avec sens positif de A' vers B') et $O'y'$ parallèle à $A'u'$ et $B'v'$ (avec le même sens positif que ces axes). Puis, *faisant coïncider les axes* Δ_1 *et* Δ_2 *de notre transformation interaxiale respectivement avec* $O'y'$ *et* $A'u'$, prenons le pôle rétrograde (pour fixer les idées) O de l'axe $A'B'$ par rapport à ces axes, ainsi que les polaires

---

[1] Nous avons donné une théorie complète de ces coordonnées dans les *Nouvelles Annales* de 1884 (p. 410, 456, 516) et 1885 (p. 110).

rétrogrades Ox et Oy des origines B′ et A′. Nous obtenons ainsi deux axes rectangulaires passant respectivement par A′ et B′.

Cela fait, prenons le pôle rétrograde P d'une droite quelconque MN de coordonnées $A'M = u'$, $B'N = v'$, en le considérant, d'après la propriété fondamentale, comme le point de rencontre des polaires rétrogrades des points M et N. Pour cela, abaissant de M et de N les perpendiculaires Mm et Nn sur Δ_1 ou $O'y'$, rabattons dans le sens rétrograde sur $O'y'$ les segments de ces perpendiculaires allant de l'axe Δ_1 ou $O'y'$ à l'axe Δ_2 ou $A'u'$, ce qui nous donne les points μ et ν; les perpendiculaires élevées respectivement à $M\mu$ en μ et à $N\nu$ en ν sont les polaires cherchées, dont le point de rencontre P est le pôle rétrograde de MN. Si ces droites $P\mu$ et $P\nu$ coupent Ox et Oy en μ_0 et ν_0, les coordonnées cartésiennes du point P rapporté à ces axes sont

$$x = O\mu_0 \qquad \text{et} \qquad y = O\nu_0 \quad (^1).$$

Or :

$$O\mu_0 = \frac{O\mu}{\sqrt{2}} = \frac{A'M}{\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad O\nu_0 = \frac{O\nu}{\sqrt{2}} = \frac{B'N}{\sqrt{2}}.$$

On voit donc que

$$u' = x\sqrt{2}, \qquad v' = y\sqrt{2},$$

ce qui montre *qu'avec les axes ci-dessus définis, et à la constante numérique* $\sqrt{2}$ *près (ce qui revient à un simple changement de module), le passage de la*

---

(1) On voit que cela suppose le sens positif pris sur ces axes dans le sens de O vers x et y de la figure. Ainsi, pour la transformation rétrograde, les sens positifs des axes sont contraires à ceux de O vers A′ et B′. On verrait de même, dans le cas de la transformation directe (auquel cas le point O viendrait dans la position symétrique par rapport à A′B′ de celle qu'il occupe sur la figure 2), que ces sens positifs seraient alors ceux de O vers A′ et B′.

courbe Γ', *enveloppe de* MN, *à la courbe* Γ, *lieu de* P (*ces deux courbes étant polaires interaxiales l'une de l'autre par rapport aux axes* Δ_1, *ou* $O'y'$, et Δ_2, *ou* $A'u'$) *s'effectue par la simple substitution des coordonnées* x *et* y *aux coordonnées* u' et v' (¹).

Il suffit donc, si l'on connaît l'équation de la courbe Γ' sous la forme

$$F(u', v') = 0,$$

d'interpréter en coordonnées cartésiennes l'équation

$$F(x\sqrt{2},\ y\sqrt{2}) = 0$$

pour obtenir la courbe Γ correspondante.

4. Nous allons en prendre quelques exemples :

1° Soit d'abord, pour Γ' rapportée à $A'u'$ et $B'v'$, l'équation

$$u'v' = k.$$

On sait (²) que c'est une conique de centre O', admettant A' et B' pour sommets, ce qui revient à dire que A_1 est un axe de cette conique, Δ_2 une de ses tangentes parallèles à cet axe. La courbe Γ est alors définie, relativement aux axes Ox et Oy par l'équation

$$xy = \frac{k}{2},$$

hyperbole équilatère d'asymptotes Ox et Oy ayant la même longueur de demi-axe que Γ' suivant $O'y'$.

(¹) Nous avions déjà (à une variante près qui ne se prêtait pas aussi commodément aux développements ainsi envisagés) indiqué cette forme géométrique de la transformation par substitution des coordonnées cartésiennes aux coordonnées parallèles dans les *Nouvelles Annales* de 1890 (p. 472).

(²) *N. A.*, 1884, p. 516.

2° Prenons maintenant pour Γ'

$$v'^2 - u'^2 = a^2$$

qui définit [1] une parabole d'axe $A'B'$, ayant son sommet en O', et coupant l'axe $B'v'$ aux points d'ordonnées $y' = \pm a$. Il vient alors pour Γ

$$y^2 - x^2 = \frac{a^2}{2},$$

hyperbole équilatère de centre O ayant ses asymptotes l'une parallèle à $O'x'$, l'autre confondue avec $O'y'$.

3° Si Γ' est définie par

$$v'^2 = 2pu',$$

autrement dit [2] est une hyperbole tangente en A' à $A'B'$, admettant $B'v'$ pour asymptote (ce qui revient à dire que Δ_2 est une normale à cette hyperbole, parallèle à une de ses asymptotes, Δ_1 la parallèle équidistante de cette normale et de cette asymptote), et dont le centre, situé sur $B'v'$, a pour ordonnée $y' = p$, on a pour Γ

$$y^2 = 2\frac{p}{\sqrt{2}}x,$$

parabole d'axe Ox, de sommet O et de paramètre $\frac{p}{\sqrt{2}}$.

4° Un cas particulièrement intéressant est celui où la courbe Γ est un cercle, ce qui exige (avec un choix convenable de l'axe des origines) que Γ' ait une équation de la forme

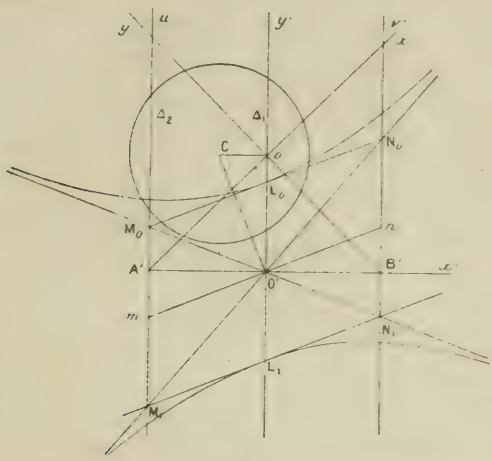
$$(u' + a)^2 + (v' - a)^2 = r^2.$$

---

(1) *N. A.*, 1885, p. 122.
(2) *Ibid.*

Dans ce cas [1], Γ′ est une hyperbole de centre O′ (*fig.* 3), dont le demi-diamètre dirigé suivant O′y' a

Fig. 3.



pour longueur $O'L_0 = \frac{r}{\sqrt{2}}$, dont le diamètre conjugué de O′y' coupe A′u' et B′v' aux points m et n, d'ordonnées $y' = -a$ et $y' = a$, telle enfin que ses asymptotes passent par les points de rencontre de A′u' et B′v' avec les tangentes menées par les extrémités du diamètre dirigé suivant O′y', parallèles, par conséquent, à mn.

La courbe Γ est alors le cercle d'équation

$$\left(x + \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(y - \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{r^2}{2}.$$

Ce cercle a pour centre le point $x = -\frac{a}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{a}{\sqrt{2}}$, c'est-à-dire le point C tel que OC, perpendiculaire à OO′, ait une longueur égale à a, c'est-à-dire à A′m. Comme, d'autre part, O′O = O′A′, on voit que le

(1) N. A., 1885, p. 121.

point C est le pôle rétrograde de $O'm$. De plus, le rayon du cercle Γ étant, d'après l'équation, égal à $\frac{r}{\sqrt{2}}$, c'est-à-dire à mM_0, on voit que *le cercle* Γ *n'est autre que celui que l'on obtient en faisant tourner d'un angle droit dans le sens rétrograde, autour du centre* O' *de l'hyperbole, le cercle admettant pour diamètre le segment* $M_0 M_1$ *de l'axe* Δ_2, *ou* Au, *compris entre les asymptotes.*

Rappelons-nous d'ailleurs qu'ici Γ est la polaire rétrograde de Γ'; donc Γ' est la polaire directe de Γ. De là, une construction simple d'une hyperbole définie par ses asymptotes $O'M_0$, $O'N_0$ et une quelconque de ses tangentes M_0N_0 :

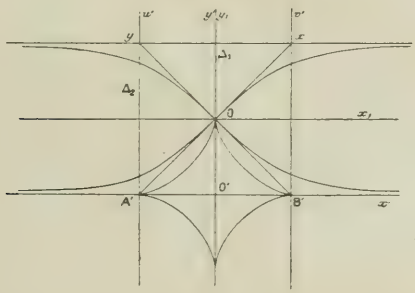
Tirant le diamètre $O'L_0$ (*en joignant le centre* O' *au milieu de* M_0N_0) *et menant la parallèle* M_0M_1 *à* $O'L_0$, *on fait tourner d'un angle droit dans le sens rétrograde, autour de* O', *le cercle ayant* M_0M_1 *pour diamètre, puis, adoptant respectivement* $O'L_0$ *et* M_0M_1 *pour axes* Δ_1 *et* Δ_2, *on prend la polaire interaxiale directe du cercle ainsi obtenu; c'est l'hyperbole, cherchée.*

Pour avoir les points de cette hyperbole, on n'aura donc qu'à prendre les pôles directs des tangentes au cercle; de même, les tangentes à l'hyperbole seront données par les polaires directes des points du cercle. Cela revient à dire que si l'on fait tourner d'un angle droit, dans le sens direct, une tangente quelconque au cercle, autour de son point de rencontre avec Δ_1, la nouvelle position que prend le point où elle coupait Δ_2 appartient à l'hyperbole, et que, de même, si l'on fait tourner d'un angle droit, dans le sens direct, la perpendiculaire abaissée du point de

contact de la tangente au cercle, autour de son point de rencontre avec Δ_1, la nouvelle position que prend (sur Δ_1) le point où elle coupait Δ_2 appartient à la tangente à l'hyperbole au point de cette courbe précédemment obtenu.

5° Si la courbe Γ' est une hypocycloïde à quatre rebroussements, ou *astroïde*, rapportons-la aux axes $A'u'$ et $B'v$, menés par deux de ses rebroussements diamétralement opposés A' et B' parallèlement à l'axe joignant ses deux autres rebroussements (*fig.* 4). On trouve

Fig. 4.



bien facilement que si l est la longueur constante de la tangente à cette courbe, limitée aux axes $O'x'$ et $O'y'$ (telle, en particulier, que $A'O' = O'B' = l$), l'équation en coordonnées u', v' de cette astroïde est

$$(u^2 - v^2)^2 + 16\, l^2 uv = 0.$$

Il en résulte que la polaire interaxiale Γ, rapportée aux axes Ox et Oy précédemment définis, est

$$(x^2 - y^2)^2 + 8\, l^2 xy = 0.$$

Si nous la rapportons aux axes Ox_1 et Oy_1, l'un parallèle à $O'x'$, l'autre confondu avec $O'y'$, son équa-

tion (après suppression des indices 1) devient

$$4x^2y^2 + l^2(y^2 - x^2) = 0$$

ou

$$\frac{l^2}{y^2} - \frac{l^2}{x^2} = 1,$$

qui définit la courbe étudiée par M. Schoute sous le nom de *punctiforme* (*kohlenspitzencurve* des auteurs de langue allemande) qui dérive de l'hyperbole comme la *cruciforme* (*kreuzcurve*) dérive de l'ellipse, l'une et l'autre exemples intéressants de courbes du quatrième ordre et de la sixième classe, possédant trois nœuds. On trouvera une intéressante monographie de cette courbe dans le *Traité des courbes spéciales remarquables* de M. F. Gomes Teixeira (t. I, p. 286).

Ici, la punctiforme dérivant d'une hyperbole équilatère, pourra elle-même être dite *équilatère*. On voit que ses tangentes OA′ et OB′ au point double réel O sont à angle droit et que l'une de ses asymptotes est confondue avec A′B′.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (JUILLET 1919); PROBLÈME DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

PREMIÈRE PARTIE.

Appelons R, θ, φ *les coordonnées sphériques d'un point dont les coordonnées rectangulaires sont* x, y, z, *de sorte que*

$$x = R\sin\theta\cos\varphi, \qquad y = R\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = R\cos\theta.$$

On considère la surface S *dont l'équation est*

$$R = a e^u,$$

a étant une constante, e la base des logarithmes népériens et u la fonction

$$u = \lambda\varphi + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \sqrt{\lambda^2 - \cos^2\theta}\, d\theta,$$

où λ *est une constante donnée.*

1° *On demande de former les équations différentielles des lignes asymptotiques et des lignes de courbure de* S.

2° *Montrer que dans les deux équations on peut séparer les variables.*

3° *Prouver que toutes les lignes de courbure de* S *(de l'une quelconque des deux familles) sont semblables. De même pour les lignes asymptotiques.*

4° *Considérer le cas où* $\lambda = 1$.

DEUXIÈME PARTIE.

1° *On considère les fonctions réelles* $\varphi(x)$ *qui sont continues sur l'intervalle* J : $0 \leqq x \leqq 1$, *et telles que*

$$0 < \varphi(x) < 1.$$

2° *Parmi ces fonctions, envisageons d'abord celles dont l'oscillation reste inférieure à* $\frac{1}{n}$ *dans tout intervalle partiel de longueur* $\frac{1}{p}$.

Montrer qu'il existe un nombre fini $2s$ *de fonctions*

$$g_1(x), \quad h_1(x), \quad g_2(x), \quad h_2(x), \quad \ldots, \quad g_s(x), \quad h_s(x)$$

qui sont continues sur J *et telles que*

$$0 \leqq h_1(x) < g_1(x) \leqq 1, \quad \ldots, \quad 0 \leqq h_s(x) < g_s(x) \leqq 1,$$
$$g_1(x) - h_1(x) \leqq \frac{3}{n}, \quad \ldots, \quad g_s(x) - h_s(x) \leqq \frac{3}{n},$$

de sorte qu'à chacune des fonctions $\varphi(x)$ *envisagées, on peut assigner un des couples* $g_i(x)$, $h_i(x)$ *satisfaisant sur* J *aux conditions*

$$h_i(x) < \varphi(x) < g_i(x).$$

3° *On demande, non seulement de prouver l'existence des fonctions* g, h *en nombre fini, mais, parmi tous les choix possibles, d'en définir au moins un explicitement connaissant seulement* n *et* p.

4° *Si l'on ne peut fixer en fonction de* n *et* p *la plus petite valeur possible du nombre* s *des couples* g, h, *on demande de déterminer au moins une fonction algébrique simple de* p *et* n *qui soit une des valeurs possibles de* s.

5° *Parmi les fonctions* $\varphi(x)$ *décrites au paragraphe* 1°, *considérons seulement maintenant celles qui admettent partout sur* J *une dérivée* φ'_x *dont la valeur absolue reste inférieure ou au plus égale à un nombre déterminé* $k > 0$. *Montrer que si* λ, ω *sont deux nombres arbitraires, l'un supérieur à* k, *l'autre à zéro, il existe un nombre fini* $2t$ *de fonctions* $q_1(x)$, $r_1(x)$, $\ldots$, $q_t(x)$, $r_t(x)$ *admettant partout sur* J *une dérivée continue dont la valeur absolue reste inférieure à* λ *et telles que*

$$0 \leqq r_1(x) < q_1(x) \leqq 1, \quad \ldots, \quad 0 \leqq r_t(x) < q_t(x) \leqq 1,$$
$$q_1(x) - r_1(x) < \omega, \quad \ldots, \quad q_t(x) - r_t(x) < \omega,$$

de sorte qu'à chacune des fonctions $\varphi(x)$ *envisagées*

maintenant, on peut assigner un des couples $q_i(x)$, $r_i(x)$, satisfaisant sur J *aux conditions*

$$r_i(x) < \varphi(x) < q_i(x).$$

A PROPOS DE LA COMPOSITION DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL DU CONCOURS D'AGRÉGATION DE JUILLET 1919;

PAR M. R. GARNIER.

La composition d'Analyse du concours d'Agrégation de juillet 1919 *comportait deux parties distinctes* (¹); *la seconde partie donnait lieu, incidemment, à un exercice sur la théorie des équations linéaires aux différences finies, exercice dont la solution n'était d'ailleurs pas exigée. Il nous a paru utile de faire connaître cette solution, que nous avons fait précéder de quelques remarques sur le problème proprement dit, proposé aux candidats.*

1. Soit $\varphi(x)$ une fonction répondant aux conditions de l'énoncé; attribuons à x la valeur $\frac{\nu}{p}$ ($\nu = 0, 1, \ldots, p-1$) et supposons que l'on ait

$$\frac{f_\nu}{n} \leqq \varphi\left(\frac{\nu}{p}\right) \leqq \frac{f_\nu + 1}{n} \qquad (f_\nu = 0, 1, \ldots, n-1);$$

(¹) *Voir* l'énoncé ci-dessus, p. 260.

l'oscillation de $\varphi(x)$ dans l'intervalle

$$(1) \qquad \frac{\nu}{p} \leqq x \leqq \frac{\nu+1}{p}$$

devant être inférieure à $\frac{1}{n}$, on aura

$$(2) \qquad f_{\nu+1} = f_\nu + \rho \qquad (\rho = -1, 0 \text{ ou } +1);$$

le second membre devant d'ailleurs être remplacé par 0 ou par n dans le cas où il serait égal à -1 ou à $n+1$. Soit alors x une valeur quelconque de l'intervalle (1); je dis qu'on aura

$$(3) \quad \frac{f_\nu - 1}{n} + \rho\,\psi\left(x - \frac{\nu}{p}\right) < \varphi(x) < \frac{f_\nu + 2}{n} + \rho\,\psi\left(x - \frac{\nu}{p}\right),$$

en désignant par $\psi(x)$ une fonction, définie et continue pour $0 \leqq x \leqq \frac{1}{p}$ et telle que

$$\psi(0) = 0, \qquad \psi\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{n}, \qquad 0 \leqq \psi(x) \leqq \frac{1}{n} \quad (^1).$$

En effet, les inégalités (3) sont évidentes pour $\rho = 0$; et, pour $\rho = +1$, par exemple, on aura (²) :

$$\varphi(x) > \varphi\left(\frac{\nu+1}{p}\right) - \frac{1}{n} \geqq \frac{f_{\nu+1} - 1}{n} = \frac{f_\nu}{n}$$
$$\geqq \frac{f_\nu}{n} - \left[\frac{1}{n} - \psi\left(x - \frac{\nu}{p}\right)\right]$$

et

$$\varphi(x) < \varphi\left(\frac{\nu}{p}\right) + \frac{1}{n} \leqq \frac{f_\nu + 1}{n} + \frac{1}{n} \leqq \frac{f_\nu + 2}{n} + \psi\left(x - \frac{\nu}{p}\right).$$

Or, les relations (3) montrent qu'on peut prendre

(¹) Par exemple, on pourra prendre $\psi(x) = \frac{px}{n}$.

(²) La représentation graphique, que nous omettons, rend la démonstration intuitive.

pour couple de fonctions $h_i(x)$, $g_i(x)$ tout couple de fonctions telles que, dans (1) on ait, pour certaines valeurs de f_ν et de ρ,

$$g_i(x) = \frac{f_\nu - 1}{n} + \rho\,\psi\left(x - \frac{\nu}{p}\right),$$

$$h_i(x) = \frac{f_\nu + 2}{n} + \rho\,\psi\left(x - \frac{\nu}{p}\right) \quad (^1),$$

la $\left\{\begin{matrix}\text{première}\\ \text{seconde}\end{matrix}\right\}$ de ces relations devant être remplacée par $\left\{\begin{matrix} g_i(x) = 0 \\ h_i(x) = 1 \end{matrix}\right\}$, si le second membre est $\left\{\begin{matrix} < 0 \\ > 1 \end{matrix}\right\}$. Toutes les conditions imposées au couple $g_i(x)$, $h_i(x)$ seront vérifiées, et le nombre des couples ainsi introduits est évidemment inférieur à l'entier $n.\,3^p$, qu'on peut donc prendre comme limite supérieure du nombre 1. C'est précisément le calcul exact du nombre s que nous nous proposons d'effectuer (²).

2. Pour cela, nous commencerons par poser sous une forme plus intuitive le problème de la détermination de s. Considérons dans le plan xOy l'ensemble des $n(p+1)$ points M_ν^j qui ont pour coordonnées

$$x = \nu, \quad y = j \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, p;\ j = 1, 2, \ldots, n).$$

Joignons les points de deux colonnes consécutives $x = \nu$ et $x = \nu + 1$ par tous les segments rectilignes de coefficients angulaires -1, 0, ou $+1$. A chaque couple $g_i(x)$, $h_i(x)$ correspond, comme image dans le dia-

---

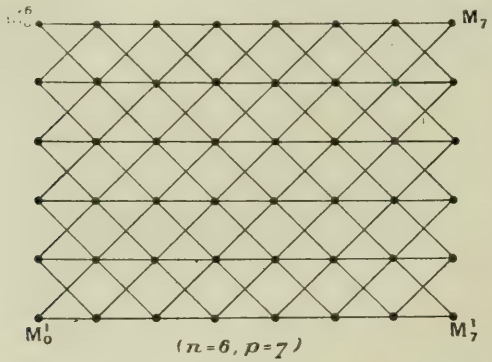
(¹) La solution du 5° de l'énoncé s'obtiendrait par un procédé analogue; on prendrait $n > \frac{1}{\omega}$, $p < kn$, et la fonction $\psi(x)$ serait assujettie en outre à la condition d'avoir pour $0 \leqq x \leqq \frac{1}{p}$ une dérivée continue nulle aux extrémités de l'intervalle, et au plus égale à k.

(²) L'expression de s est donnée à la fin du n° 4 [éq. (16)].

gramme précédant une ligne brisée, dont les sommets consécutifs ont pour coordonnées

$$x = \nu, \qquad y = f_\nu + 1 \qquad (\nu = 0, \ldots, p)$$

et dont les coefficients angulaires ρ sont -1, 0 ou $+1$. *Le nombre s est donc égal au nombre total de toutes les lignes brisées, partant d'un point de la colonne de gauche* ($x = 0$) *du diagramme et aboutissant à l'un quelconque des points de la colonne de droite* ($x = p + 1$), ces lignes brisées devant être formées à l'aide de segments du diagramme, et n'admettant comme sommets que des points M_ν^j du diagramme.



En général, pour passer d'une colonne $x = \nu$ à la suivante, $x = \nu + 1$, on a le choix entre trois valeurs de ρ; toutefois, sur les lignes extrêmes (pour $f_\nu = 0$ ou $n - 1$), il n'y a plus que deux directions possibles pour le nouveau côté de la ligne brisée; et c'est précisément cette irrégularité qui complique le calcul de s.

3. Pour calculer le nombre s, nous supposerons n pair, soit $n = 2m$, le cas opposé se traitant, d'ailleurs, d'une

façon analogue, et nous appellerons [1] u_ν^j le nombre de toutes les lignes brisées, issues de l'un quelconque des points M_0^i $(i = 1, \ldots, n)$ et aboutissant, suivant la manière indiquée plus haut, au point M_ν^j. Nous aurons immédiatement

$$s = 2\sum_{j=1}^{m} u_\nu^j,$$

et tout reviendra à calculer les u_ν^j. Or, ces nombres satisfont évidemment aux équations linéaires aux différences finies :

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{ll} u_{\nu+1}^1 = & u_\nu^1 + u_\nu^2, \\ u_{\nu+1}^2 = & u_\nu^1 + u_\nu^2 + u_\nu^3, \\ u_{\nu+1}^3 = & \qquad u_\nu^2 + u_\nu^3 + u_\nu^4, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{\nu+1}^{m-1} = & \qquad\qquad u_\nu^{m-2} + u_\nu^{m-1} + u_\nu^m, \\ u_{\nu+1}^m = & \qquad\qquad\qquad u_\nu^{m-1} + 2u_\nu^m, \end{array}\right.$$

en même temps qu'aux conditions initiales

$$(5)\qquad u_0^j = 1 \qquad (j = 1, \ldots, m).$$

Le problème se ramène donc à déterminer la solution de (4) *qui satisfait à* (5). Or le système (4) possède m solutions particulières de la forme

$$(6)\qquad U_{\nu,k}^j = Q_{j,k}(1 + S_k)^\nu,$$

les $Q_{j,k}$ étant indépendants de ν, et S_k désignant l'une

---

[1] Pour u_ν^j, et plus loin pour U_ν^j, j a le sens d'un indice : *partout ailleurs, l'indice supérieur désignera un exposant.*

des racines de l'équation caractéristique (d'ordre m).

$$(7)\qquad f_m(S) \equiv \begin{vmatrix} S & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & S & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & S & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot\cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & S & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & S-1 \end{vmatrix} = 0.$$

Calculons d'abord les S_k. Or $f_m(S)$ satisfait à l'équation aux différences

$$(8)\qquad y_m - S y_{m-1} + y_{m-2} = 0,$$

et l'on a $f_1 = S - 1$, $f_2 = S^2 - S - 1$, d'où, si l'on veut,

$$(9)\qquad f_0 = 1, \qquad f_1 = S - 1.$$

Mais la solution générale de (8) est de la forme

$$f_m = A\sigma_1^m + B\sigma_2^{-m},$$

A et B étant indépendants de m, et σ_1, σ_2 étant racines de l'équation

$$\sigma^2 - S\sigma + 1 = 0.$$

Pour simplifier l'écriture, posons

$$S = x + \frac{1}{x};$$

il viendra $\sigma_1 = \frac{1}{x}$, $\sigma_2 = x$, et, en écrivant que les conditions (9) sont vérifiées,

$$A + B = 1,$$
$$A + Bx^2 = 1 - x + x^2,$$

d'où

$$A : B : 1 = 1 : x : x + 1$$

et enfin

$$f_m = \frac{1}{x+1}\left(\frac{1}{x^m} + x^{m+1}\right).$$

Ainsi donc, x satisfait à l'équation

$$x^{2m+1}+1=0,$$

et l'on en déduit

$$x_k = e^{\frac{(2k+1)\pi i}{2m+1}} \qquad \text{et} \qquad S_k = 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2m+1}$$
$$(k=0,1,\ldots,m-1).$$

Passons maintenant aux $Q_{j,k}$; ils sont proportionnels aux mineurs extraits de la matrice formée par les $m-1$ premières lignes de (7) (où l'on aurait remplacé S par S_k). On en déduit aisément que les $Q_{j,k}$ (où k est fixe) vérifient, eux aussi, l'équation (8) (où l'on aurait remplacé S par S_k); en outre, on a immédiatement $Q_{1,k}=1$, $Q_{2,k}=S_k$, d'où, si l'on préfère,

$$Q_{0,k}=0, \qquad Q_{1,k}=1$$

et, par conséquent,

$$Q_{j,k}=C_k x_k^j + D_k x_k^{-j},$$

avec

$$C_k + D_k \quad = 0,$$
$$C_k + D_k x_k^2 = x_k.$$

On a donc

$$Q_{j,k}=\frac{x_k^j - x_k^{-j}}{x_k - x_k^{-1}}.$$

Supprimons le facteur commun $(x_k - x_k^{-1})^{-1}$ sans intérêt, et nous pourrons adopter enfin, comme système fondamental de solutions des équations (4), les expressions

$$(10) \qquad \overline{U}_{\nu,k}^j = (x_k^j - x_k^{-j})\left[1+2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2m+1}\right]^\nu.$$

Dès lors, les solutions u_ν^j, qui nous sont nécessaires,

sont de la forme

$$(11) \qquad u_\nu^j = \sum_{k=0}^{m-1} A_k \overline{U}_{\nu,k}^j,$$

les A_k étant définis, d'après (5), par les équations

$$(12) \qquad \sum_{k=0}^{m-1} A_k (x_k^j - x_k^{-j}) = 1,$$

qu'il nous reste à résoudre.

4. A cet effet, considérons la fonction rationnelle

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{A_k}{x - x_k} - \frac{A_k}{x - x_k^{-1}} \right) - \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x} + \ldots + \frac{1}{x^{m-1}} \right)$$

de la variable auxiliaire x. En vertu de (12), cette fonction possède $x = \infty$ comme zéro d'ordre $m+2$ au moins; on a donc

$$(13) \qquad \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{A_k}{x - x_k} - \frac{A_k}{x - x_k^{-1}} \right) - \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x} + \ldots + \frac{1}{x^{m-1}} \right) = \frac{C_{2m} x^{2m} + \ldots + C_0}{x^{m+1}(x^{2m+1} + 1)},$$

les C étant des constantes. Dans cette relation, changeons x en x^{-1}, et divisons les deux membres de la relation obtenue par x^2; la somme Σ ne change pas, et l'on aura

$$(14) \qquad \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{A_k}{x - x_k} - \frac{A_k}{x - x_k^{-1}} \right) - (1 + \ldots + x^{m-1}) = \frac{C_0 x^{3m} + \ldots + C_{2m} x^m}{x^{2m+1} + 1}.$$

Retranchons membre à membre (14) de (13), et il viendra

$$(x^{2m+1}+1)\left(x^{m-1}+\ldots+1-\frac{1}{x^2}-\ldots-\frac{1}{x^{m+1}}\right)$$
$$=-C_0x^{3m}-\ldots-C_{2m}x^m+C_{2m}x^{m-1}+\ldots+C_0x^{-m-1},$$

identité en x, qui fournit pour les C les valeurs

$$C_0=C_1=\ldots=C_{m-1}=-1,\qquad C_m=0,$$
$$C_{m+1}=\ldots=C_{2m-1}=C_{2m}=+1,$$

et l'on aura, en conséquence,

$$\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{A_k}{x-x_k}-\frac{A_k}{x-x_k^{-1}}\right)$$
$$=\frac{1}{x^2}\left(1+\ldots+\frac{1}{x^{m-1}}\right)$$
$$+\frac{x^{2m}+\ldots+x^{m+1}-(x^{m-1}+\ldots+1)}{x^{m+1}(x^{2m+1}+1)}.$$

De cette relation, on déduit, en égalant de part et d'autre les résidus pour $x=x_k$,

$$A_k=-\frac{1}{2m-1}\,\frac{1}{x_k^m}(x_k^{m-1}+\ldots+1)(x_k^{m+1}-1)$$
$$=-\frac{(x_k^m-1)(x_k^{m+1}-1)}{(2m+1)x_k^m(x_k-1)}$$
$$=\frac{1}{2m+1}\,\frac{x_k+1}{x_k-1}$$
$$=\frac{1}{(2m+1)i}\cot\frac{(2k-1)\pi}{2(2m+1)}.$$

Introduite dans (11), cette valeur donne, en vertu de (10),

$$(15)\qquad u_\nu^j=\frac{2}{2m+1}\sum_{k=0}^{m-1}\cot\frac{(2k+1)\pi}{2(2m+1)}\sin\frac{(2k+1)j\pi}{2m+1}$$
$$\times\left[1+2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2m+1}\right]^\nu,$$

et l'on aura enfin, grâce à une sommation facile,

$$s = \frac{2}{2m+1} \sum_{k=0}^{m-1} \cot^2 \frac{(2k+1)\pi}{2(2m+1)} \left[1 + 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{2m+1} \right]^p.$$

Comme nous l'avons dit, la même méthode s'applique pour n impair; on obtiendra ainsi pour s deux expressions qu'on peut réunir dans la suivante (qui résout la question proposée) :

$$(16) \quad s = \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cot^2 \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)} \left[1 + 2\cos\frac{(2k+1)\pi}{n+1} \right]^p.$$

5. Avant d'indiquer les applications des formules (15) et (16), observons d'abord que *les u_ν^j peuvent être obtenus par un procédé régulier de calcul.* Formons un Tableau de $p+1$ colonnes et n lignes, le nombre u_ν^j devant occuper la $(\nu+1)^{\text{ième}}$ colonne, à partir de la gauche, et la $j^{\text{ième}}$ ligne à partir du haut ou du bas (ce qui suppose d'ailleurs $2j < n$). Cela étant, d'après (4), la première colonne du Tableau ne contiendra que des unités; et chaque élément d'une colonne sera la somme des 3 (ou 2) éléments de la colonne de gauche occupant la même ligne et les (ou la) lignes immédiatement voisines. L'application de ce procédé, pour $n = 3$, $p = 8$, donne ainsi le Tableau :

1	2	5	12	29	70	169	408	985
1	3	7	17	41	99	239	577	1393
1	2	5	12	29	70	169	408	985

Or, pour $n = 3$, la formule (16) donne

$$s = \frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^{p+2} + (1-\sqrt{2})^{p+2} \right];$$

actuellement sa vérification est immédiate. On vérifierait de même les formules

$$s = 1, \qquad s = 2^{p+1},$$

$$s = \frac{2}{5}\left[(5+2\sqrt{5})\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^p + (5-2\sqrt{5})\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^p\right]$$

qui correspondent respectivement à $n = 1$, $n = 2$, $n = 4$.

Servons-nous maintenant de la formule (16) pour obtenir des *valeurs asymptotiques du nombre s*. Tout d'abord, *supposons n fixe* et faisons croître p indéfiniment; nous obtiendrons comme expression asymptotique de s :

$$\frac{2}{n+1}\cot^2\frac{\pi}{2(n+1)}\left(1+2\cos\frac{\pi}{n+1}\right)^p;$$

n restant fixe, le rapport de deux valeurs consécutives de s tend donc vers $1+2\cos\frac{\pi}{n+1}$, et l'on peut déduire de là un procédé de calcul approché de $\cos\frac{\pi}{n+1}$. C'est ainsi que pour $n = 3$, $p = 7$ et $p = 8$, le Tableau précédent donne respectivement $s = 1393$, et $s = 3363$; or, on a [1]

$$\frac{3363}{1393} = 2,414\,213\,|\,9\ldots.$$

Supposons maintenant que *p et n croissent indéfiniment de telle sorte que* $\frac{p\,\frac{1}{2}\log n}{n}$ *tende vers zéro, par exemple.* Le facteur $\left[1+2\cos\frac{(2k+1)\pi}{n+1}\right]^p$ est alors asymptote à 3^p pour $0 \leqq k \leqq \log n$; d'autre part, l'ex-

---

[1] Le rapprochement entre ce mode de calcul et la théorie des fractions continues est immédiat.

pression

$$\frac{2}{n-1}\sum_{k=0}^{\log n}\cot^2\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}$$

a pour valeur asymptotique

$$\frac{8n}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\log n}\frac{1}{(2k+1)^2},$$

c'est-à-dire n; la valeur asymptotique de s est donc alors $n.3^p$: *c'est l'expression approchée évidente que nous avions indiquée plus haut* (n° 1).

6. Terminons enfin par une application de la formule (15). Prenons, par exemple, $j=1$ et supposons $\nu=p<n$, auquel cas u_p^1 est manifestement indépendant de n; faisons donc croître n indéfiniment : à la limite on pourra écrire encore :

$$(17)\quad u_p^1=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x(1+2\cos 2x)^p\,dx \qquad (n>p),$$

formule remarquable, aisée à vérifier pour les premières valeurs de u_p^1 :

(1, 2, 5, 13, 35, 96, 267, 750, 2123, 6046, ...).

Cherchons la valeur asymptotique du second membre de (17) pour $p=\infty$. Posons

$$\sin^2 x=y,$$

il viendra

$$u_p^1=\frac{2}{\pi}\int_0^1 y^{-\frac{1}{2}}(1-y)^{\frac{1}{2}}(3-4y)^p\,dy$$

$$=\frac{2}{\pi}3^p\int_0^1 y^{-\frac{1}{2}}(1-y)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{4y}{3}\right)^p dy,$$

c'est-à-dire, en faisant $\frac{4y}{3} = \frac{z}{p}$,

$$u_p^1 = \frac{2}{\pi}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{3^p}{p^{\frac{1}{2}}} \int_0^{\frac{4p}{3}} z^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{3z}{4p}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{z}{p}\right)^p dz.$$

Mais la dernière intégrale est uniformément convergente pour $p = \infty$; elle tend donc vers

$$\int_0^{+\infty} z^{-\frac{1}{2}} e^{-z}\, dz = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}},$$

et la valeur asymptotique de u_p^1 $(n > p)$ est

$$3^p \sqrt{\frac{3}{p\pi}}.$$

Théoriquement du moins, on pourrait déduire de ce résultat (ou d'autres analogues) un procédé pour évaluer le nombre π.

CHRONIQUE.

Sorbonne.

M. *Paul Painlevé*, professeur de Mécanique rationnelle, est nommé professeur de Mécanique analytique et Mécanique céleste en remplacement de M. Appell.

M. *Élie Cartan*, professeur de Calcul différentiel

et intégral, est nommé professeur de Mécanique rationnelle, en remplacement de M. Painlevé.

M. *Ernest Vessiot*, professeur de Mathématiques générales, est nommé professeur de Calcul différentiel en remplacement de M. Cartan.

Elections.

M. *G. Kœnigs*, professeur de Mécanique physique et expérimentale à la Sorbonne, est élu membre du Conseil supérieur de l'Instruction publique, en remplacement de M. Appell.

M. *L.-E. Dickson*, professeur à l'Université de Chicago, est élu (17 mai) membre correspondant de l'Académie des Sciences dans la Section de Géométrie en remplacement de M. Cosserat, nommé membre non résident.

M. *Ch. Riquier*, professeur à l'Université de Caen, est élu (14 juin) membre correspondant de l'Académie des Sciences dans la Section de Géométrie en remplacement de M. Zeuthen.

Périodiques.

Journal de l'École Polytechnique (2e série, 20e cahier; 1919) :

P. Humbert : Sur les surfaces de Poincaré. — H. Malet : Mémoire sur les éléments et les notions géométriques. — J. Réveille : Examen critique du Mémoire de Poinsot sur la Théorie nouvelle de la

rotation des corps. — E. Maillet : Détermination des points entiers des courbes algébriques unicursales à coefficients entiers dans l'espace à k dimensions.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences (2e trimestre 1920) :

G.-J. Remoundos : Sur les fonctions croissantes et les fonctions entières (p. 829). — P. Humbert : Sur une nouvelle application de la fonction $W_{k,\mu,\nu}(x, y)$ (p. 832). — L.-E.-J. Brouwer : Énumération des classes de transformations du plan projectif (p. 834). — J. Andrade : Extension des systèmes conservatifs et généralisation d'un théorème de M. Painlevé (p. 835). — G. Julia : Sur les familles de fonctions de plusieurs variables (p. 875). — L. Bianchi : Sur les couples de surfaces à lignes de courbure associées (p. 878). — G. Julia : Propriétés nouvelles de certaines classes très générales de fonctions entières ou méromorphes (p. 917). — W. Sierpinski : Sur les fonctions de première classe (p. 919). — Fr. Lange Niflsen : Sur une généralisation du théorème de Rolle (p. 922). — E. Maillet : Sur quelques propriétés des nombres transcendants (p. 983). — G. Julia : Sur les familles de fonctions de plusieurs variables (p. 1040). — B. Jekhowsky : Sur les équations différentielles du deuxième ordre vérifiées par les fonctions de Bessel à plusieurs variables (p. 1042). — J. Kampé de Fériet : Sur l'emploi des dérivées généralisées pour la formation et l'intégration de certaines équations différentielles linéaires (p. 1045). — D. Hondros : Sur l'intégration de l'équation de Laplace entre deux sphères non concentriques (p. 1051). — Cl. Guichard : Sur les réseaux et les congruences conjuguées par rapport à un complexe

linéaire (p. 1053). — P. Boutroux : Sur une famille de fonctions multiformes définies par des équations différentielles du premier ordre (p. 1098). — M. Janet : Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles (p. 1101). — G. Cerf : L'analyse des tenseurs antisymétriques et les formes symboliques de différentielles (p. 1104). — Th. de Donder et H. Vanderlinden : Les nouvelles équations fondamentales de la gravifique (p. 1107). — P. Humbert : Sur la solution générale du système auquel satisfait la fonction $W_{k,\mu,\nu}(x, y)$ (p. 1152). — Nils Pipping : Un critérium pour les nombres algébriques réels, fondé sur une généralisation directe de l'algorithme d'Euclide (p. 1155). — J. Drach : Sur le mouvement de l'axe d'un solide homogène pesant de révolution qui a un point fixe sur cet axe (p. 1156). — E. Goursat : Sur quelques transformations des équations aux dérivées partielles du second ordre (p. 1217). — G. Julia : Sur les familles de fonctions de plusieurs variables (p. 1234). — M. Janet : Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles et les systèmes de formes algébriques (p. 1236). — A. Véronnet : Figures d'équilibre d'un liquide en rotation. Ordre de succession des figures critiques de bifurcation (p. 1303). — G. Julia : Les fonctions de deux variables complexes et les fonctions limites des fonctions analytiques uniformes ou multiformes d'une variable (p. 1363). — R. Thiry : Sur la représentation conforme de domaines doublement connexes à contours rectilignes (p. 1366). — H. Villat : Sur la représentation conforme des aires doublement connexes (p. 1371). — B. Gambier : Surfaces de translation de Sophus Lie (p. 1373). — C. Guichard : Détermination des congruences C et des congruences 20 qui appartiennent à un complexe linéaire (p. 1429). —

E. Cartan : Sur la déformation projective des surfaces (p. 1429). — J. Andrade : Sur les droites spéciales de contact des hélices générales (p. 1442). — P. Humbert : Fonctions de l'hyperparaboloïde de révolution et fonctions hypersphériques (p. 1482). — G. Remoundos : Sur le module et les zéros des fonctions analytiques (p. 1557). — J. Chazy : Sur l'allure du mouvement dans le problème des trois corps quand le temps croît indéfiniment (p. 1560).

QUESTIONS.

2445. Une ellipse étant donnée, il existe pour chaque tangente deux cercles passant par les foyers et tangents à cette droite. Les points de contact des deux cercles avec la droite sont sur les tangentes à la courbe aux sommets du petit axe; les deux cercles se coupent sous un angle constant.

G. F. et R. B.

2446. Si MN est une corde d'une conique tangente en P et Q à deux cercles bitangents à la courbe et ayant leurs centres sur le même axe, les deux segments MN et PQ ont même milieu.

G. Fontené.

2447. Étant donnée, dans le plan, une région limitée par un contour convexe, on peut, d'une infinité de manières, mener deux cordes AC et BD de ce contour, se coupant à l'intérieur de la région considérée et la partageant en quatre régions d'aires données.

Démontrer que la tangente à la courbe, lieu du point de rencontre des deux cordes, est parallèle à la troisième diagonale du quadrilatère ABCD.

R. B.

2448. Étant données deux courbes planes quelconques, une courbe de grandeur invariable se meut dans leur plan commun de manière à avoir avec chacune d'elles une corde commune de longueur constante. Trouver, pour une position de la courbe mobile, le centre instantané de rotation du plan qu'elle entraîne. R. B.

[O¹6k]

SURFACES DE TRANSLATION APPLICABLES L'UNE SUR L'AUTRE;

PAR M. BERTRAND GAMBIER,
Professeur à la Faculté des Sciences de Rennes.

1. Une famille de surfaces minima associées offre un bel exemple de surfaces applicables les unes sur les autres. Dans une telle famille, soit une surface S : elle est engendrée par la translation de l'une ou l'autre de deux courbes minima C ou Γ; soient S_1 une autre surface de cette famille, C_1 et Γ_1 les courbes de même définition sur S_1. Dans l'application de S sur S_1, le réseau des diverses positions de C recouvre le réseau des diverses positions de C_1; il en est de même pour les réseaux Γ et Γ_1.

Je généraliserai cet exemple : *je vais chercher s'il existe un couple de deux surfaces de translation* S *et* S_1, *applicables l'une sur l'autre, telles que les deux réseaux de translation tracés sur* S *correspondent, courbe par courbe, respectivement aux deux réseaux de translation tracés sur* S_1.

Une surface minima quelconque donne une solution avec non seulement un couple, mais toute une famille de surfaces à déformation continue. Nous ne nous occuperons plus de ce cas.

Une solution banale est constituée par une surface de translation quelconque S et une surface S_1 égale à S ou bien égale à une symétrique de S.

Une autre solution banale est offerte par deux cylindres quelconques : Soit S le premier, je prends une génératrice *déterminée* comme courbe C et une courbe quelconque tracée sur S comme courbe Γ; je choisis sur le second cylindre S_1 une génératrice *quelconque*, ce sera la courbe C_1. J'enroule S sur S_1 de façon que C recouvre C_1; la courbe Γ recouvre alors sur S_1 une certaine courbe qui sera la courbe Γ_1.

En écartant de telles solutions, je trouverai *quatre groupes distincts de solutions*. Le premier ou second groupe donne un *couple unique* de deux surfaces simultanées S et S_1; chacun de ces couples dépend de trois ou deux constantes arbitraires et de deux fonctions d'une variable. Les troisième et quatrième groupes donnent au contraire une *déformation continue*.

L'énoncé géométrique est remarquable de simplicité : *Les courbes simultanées* C *et* Γ *admettent pour indicatrice sphérique des courbures deux coniques sphériques homofocales quelconques (ou dégénérescences de telles coniques). Un tel couple de courbes* C *et* Γ *détermine* S *et alors la surface* S_1 *peut être orientée, de sorte que* C_1 *ait même indicatrice des courbures que* Γ, *et que* Γ_1 *ait même indicatrice que* C.

Je montrerai même que l'on peut écrire explicitement les équations de S et S_1 dégagées de tout signe d'intégration. On peut en particulier obtenir une infinité de surfaces algébriques ou même unicursales.

2. Les courbes C, Γ, C_1 et Γ_1 n'étant pas minima, prenons pour paramètres indépendants les arcs α de C ou C_1 et β de Γ ou Γ_1. J'écris :

$$(S) \quad x = a_1 + b_1, \qquad y = a_2 + b_2, \qquad z = a_3 + b_3,$$
$$(S_1) \quad X = A_1 + B_1, \qquad Y = A_2 + B_2, \qquad Z = A_3 + B_3.$$

En appelant a'_1, b'_1, ... les quantités $\frac{da_1}{d\alpha}$, $\frac{db_1}{d\beta}$, ..., les conditions nécessaires et suffisantes sont évidemment :

$$(1)\quad \begin{cases} a'^2_1 + a'^2_2 + a'^2_3 = 1, & A'^2_1 + A'^2_2 + A'^2_3 = 1, \\ b'^2_1 + b'^2_2 + b'^2_3 = 1, & B'^2_1 + B'^2_2 + B'^2_3 = 1; \end{cases}$$

$$(2)\quad a'_1 b'_1 + a'_2 b'_2 + a'_3 b'_3 = A'_1 B'_1 + A'_2 B'_2 + A'_3 B'_3.$$

Les points A (A'_1, A'_2, A'_3) et a (a'_1, a'_2, a'_3) décrivent deux courbes sphériques simultanées (A) et (a) sur lesquelles on a établi une certaine correspondance ponctuelle. Je considère de même la correspondance ponctuelle existant entre les courbes de même définition (B) et (b). Il est nécessaire et suffisant que l'arc de grand cercle réunissant un point quelconque a de (a) à un point quelconque b de (b) soit toujours égal à l'arc de grand cercle réunissant les points homologues A et B.

Il est bien clair qu'étant donnée une solution de ce problème de géométrie sphérique on pourra déplacer d'un bloc sur la sphère le système (a), (b) d'une part ou le système (A), (B) de l'autre. Je pourrai aussi remplacer le système (a), (b) par l'ensemble des deux courbes symétriques par rapport au centre de la sphère. Cela revient à un déplacement de S ou S_1 ou à une transformation de S par symétrie, ce qui ne change pas la solution, mais permet de trouver les positions canoniques relatives de S et S_1.

Le résultat s'obtient aisément par une méthode classique appliquée à l'équation (2) prise d'abord toute seule. Dans cette équation je donne à β des valeurs *numériques;* j'obtiens autant de relations linéaires et homogènes à coefficients numériques entre a'_1, a'_2, a'_3, A'_1, A'_2, A'_3 ; l'ensemble de toutes ces relations se réduit nécessairement, si le problème est possible, à moins de six distinctes : soit h le nombre de celles qui sont

linéairement indépendantes, elles permettent d'exprimer a'_1, a'_2, a'_3, A'_1, A'_2, A'_3 en fonctions linéaires et homogènes à coefficients numériques de $6-h$ quantités u_1, u_2, ... fonctions de α. Et alors si dans (2) on remplace a'_1, a'_2, ..., A'_3 par ces expressions, on obtient une relation qui doit être vérifiée pour *tous* les systèmes de valeurs attribuées à u_1, u_2, ... En égalant aux deux membres les coefficients de u_1, u_2, ..., on obtient $6-h$ relations linéaires et homogènes à coefficients numériques entre b'_1, b'_2, b'_3, B'_1, B'_2, B'_3; l'ensemble des h relations entre les a' et A' d'une part, et des $6-h$ relations entre les b' et B' de l'autre est nécessaire et suffisant pour que (2) soit vérifiée; c'est à partir de ce moment seulement que l'on tiendra compte des équations (1). On a

$$h \leqq 5 \qquad \text{et} \qquad 6-h \leqq 5;$$

donc il reste $1 \leqq h \leqq 5$; et comme les paramètres α et β jouent le même rôle, puisque changer h en $6-h$ revient à échanger α et β, je n'aurai qu'à étudier $h=5$, $h=4$, $h=3$.

3. Si $h=5$, les rapports mutuels des a' et A' sont constants; en vertu de (1) ces six quantités sont constantes. La courbe (a) ainsi que la courbe (A) se réduit à un point; les courbes (b) et (B) sont arbitraires, la correspondance ponctuelle entre (b) et (B) s'obtient en coupant ces deux courbes respectivement par des circonférences tracées de a et A avec le même rayon sphérique. S et S_1 sont deux cylindres se correspondant génératrice par génératrice comme il a été déjà expliqué.

Si $h=4$, on peut écrire au moyen de douze

nombres $l_1, l_2, \ldots, M_3$ et de deux fonctions U et V de α :

$$(3)\quad \begin{cases} a'_1 = l_1 U + m_1 V, & A'_1 = L_1 U + M_1 V, \\ a'_2 = l_2 U + m_2 V, & A'_2 = L_2 U + M_2 V, \\ a'_3 = l_3 U + m_3 V, & A'_3 = L_3 U + M_3 V; \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2) U^2 + 2(l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3) UV \\ \qquad\qquad + (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2) V^2 = 1, \\ (L_1^2 + L_2^2 + L_3^2) U^2 + 2(L_1 M_1 + L_2 M_2 + L_3 M_3) UV \\ \qquad\qquad + (M_1^2 + M_2^2 + M_3^2) V^2 = 1. \end{cases}$$

Si ces deux relations (4) ne se réduisent pas à une seule, U et V seront eux-mêmes numériques, et alors nous retombons sur le cas des deux cylindres. Essayons donc de réduire ces deux relations à une seule, d'où

$$(5)\quad \begin{cases} l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2, \\ m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = M_1^2 + M_2^2 + M_3^2, \\ l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 = L_1 M_1 + L_2 M_2 + L_3 M_3; \end{cases}$$

en remplaçant U par $\lambda u + \mu v$, V par $\lambda' u + \mu' v$, on peut toujours supposer $\Sigma l_1^2 \neq 0$ et $\Sigma m_1^2 \neq 0$; en remplaçant U par $U\sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}$ et V par $V\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}$, on peut supposer $\Sigma l_1^2 = 1$, $\Sigma m_1^2 = 1$; donc les deux points $l(l_1, l_2, l_3)$ et $m(m_1, m_2, m_3)$ d'une part, les deux points $L(L_1, L_2, L_3)$ et $M(M_1, M_2, M_3)$ de l'autre sont sur la sphère décrite de O pour centre avec l'unité pour rayon ; la distance sphérique lm est égale à la distance sphérique LM ; faisons un déplacement d'ensemble des courbes (a), (b) d'une part, (A), (B) de l'autre, de façon à appliquer l sur L, m sur M, et ensuite à faire venir L et M dans le plan xOy : le point a et le point A sont toujours en coïncidence et décrivent le grand cercle de la sphère dans le plan xOy ; autrement dit, les quatre relations linéaires ont été réduites à la forme canonique

$$(6)\qquad A'_1 = a'_1, \qquad A'_2 = a'_2, \qquad A'_3 = 0, \qquad a'_3 = 0$$

et le raisonnement du n° 2 prouve que la relation (2) entraîne

$$(7) \qquad B'_1 = b'_1, \qquad B'_2 = b'_2;$$

d'où l'on déduit nécessairement $B'_3 = \pm b'_3$ en vertu de (1).

Si donc $B'_3 = b'_3$, S et S_1 sont égales, à une translation près; si $B'_3 = -b'_3$, S et S_1 sont symétriques par rapport au plan xOy; nous n'avons donc obtenu qu'un cas particulier (courbes C et C_1 planes) d'une solution rejetée *a priori* comme banale.

4. Nous n'avons plus à étudier que le cas $h = 3$. Il se partage dès le début en deux suivant que l'on peut ou non résoudre en A'_1, A'_2, A'_3 les trois relations linéaires supposées existantes entre les a' et A'. Dans la première hypothèse, $\lambda, \ldots, \nu''$ désignant des constantes, j'écris

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} A'_1 &= \lambda\, a'_1 + \mu\, a'_2 + \nu\, a'_3, \\ A'_2 &= \lambda' a'_1 + \mu' a'_2 + \nu' a'_3, \\ A'_3 &= \lambda'' a'_1 + \mu'' a'_2 + \nu'' a'_3, \end{aligned} \right.$$

et la méthode du n° 2 donne

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} b'_1 &= \lambda B'_1 + \lambda' B'_2 + \lambda'' B'_3, \\ b'_2 &= \mu B'_1 + \mu' B'_2 + \mu'' B'_3, \\ b'_3 &= \nu B'_1 + \nu' B'_2 + \nu'' B'_3, \end{aligned} \right.$$

Les relations (1) entraînent

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(\lambda\, a'_1 + \mu\, a'_2 + \nu\, a'_3)^2 \\ &+ (\lambda' a'_1 + \mu' a'_2 + \nu' a'_3)^2 \\ &+ (\lambda'' a'_1 + \mu'' a'_2 + \nu'' a'_3)^2 = 1, \\ &a'^2_1 + a'^2_2 + a'^2_3 = 1. \end{aligned} \right.$$

Si les constantes λ, μ, ..., ν'' sont telles que la pre-

mière équation (10) coïncide avec la seconde, les relations (8) et (9) expriment ou qu'un déplacement d'ensemble de (A) et (B) amène (A) en coïncidence avec (a) et (B) avec (b) ou qu'un déplacement de cette espèce fera coïncider (A) avec la symétrique de (a) par rapport à l'origine et (B) avec la symétrique de (b). Nous retrouvons le déplacement le plus général ou la symétrie la plus générale; notre méthode, correctement appliquée, ne pouvait pas ne pas retrouver cette solution, si banale soit-elle.

Supposons donc les deux équations (10) distinctes; le point a décrit donc une *conique sphérique*. Je prends pour axes de coordonnées les axes de la quadrique Q définie par la première équation (10), qui se réduira donc à la forme

$$l^2 a_1'^2 + m^2 a_2'^2 + n^2 a_3'^2 = 1, \tag{11}$$

où l, m, n, sont trois constantes non nulles toutes trois (réelles ou imaginaires). Il est clair que je devrai distinguer trois cas : $lmn \neq 0$, puis $lm \neq 0$, $n = 0$, puis $l \neq 0$, $m = 0$, $n = 0$. Mais peu importe pour l'instant : dire que la quadrique Q est définie aussi bien par la première équation (10) que par l'équation (11) revient à écrire

$$\left\{\begin{array}{lll} \lambda = lu, & \lambda' = lu', & \lambda'' = lu'', \\ \mu = mv, & \mu' = mv', & \mu'' = mv'', \\ \nu = nw, & \nu' = nw', & \nu'' = nw'', \end{array}\right. \tag{12}$$

le tableau

$$\begin{vmatrix} u & u' & u'' \\ v & v' & v'' \\ w & w' & w'' \end{vmatrix} \tag{13}$$

étant le tableau d'une substitution orthogonale, de sorte que les formules (8) prouvent que la courbe (A_1', A_2', A_3') est égale à la courbe lieu du point (la_1', ma_2', na_3'); par

un déplacement d'ensemble de (A) et (B), je supposerai donc

$$A'_1 = la'_1, \qquad A'_2 = ma'_2, \qquad A'_3 = na'_3;$$

les formules (8) et suivantes se réduisent à

$$(14)\quad \begin{cases} A'_1 = la'_1, & A'_2 = ma'_2, & A'_3 = na'_3, \\ b'_1 = lB'_1, & b'_2 = mB'_2, & b'_3 = nB'_3, \\ & l^2 a'^2_1 + m^2 a'^2_2 + n^2 a'^2_3 = 1, \\ & a'^2_1 + a'^2_2 + a'^2_3 = 1, \end{cases}$$

avec, conséquence évidente,

$$(15)\quad \begin{cases} l^2 B'^2_1 + m^2 B'^2_2 + n^2 B'^2_3 = 1, \\ B'^2_1 + B'^2_2 + B'^2_3 = 1; \end{cases}$$

donc la courbe (B) n'est autre que la courbe (a), et la courbe (A) coïncide avec la courbe (b). Pour continuer, il est nécessaire de spécifier si chaque nombre l, m, n est ou non nul.

5. Supposons d'abord $lmn \neq 0$. J'écris

$$(16)\quad \begin{cases} a'_1 = \dfrac{A'_1}{l}, & a'_2 = \dfrac{A'_2}{m}, & a'_3 = \dfrac{A'_3}{n}; \\ B'_1 = \dfrac{b'_1}{l}, & B'_2 = \dfrac{b'_2}{m}, & B'_3 = \dfrac{b'_3}{n}, \end{cases}$$

et par suite

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{A'^2_1}{l^2} + \dfrac{A'^2_2}{m^2} + \dfrac{A'^2_3}{n^2} = 1, & \dfrac{b'^2_1}{l^2} + \dfrac{b'^2_2}{m^2} + \dfrac{b'^2_3}{n^2} = 1, \\ A'^2_1 + A'^2_2 + A'^2_3 = 1, & b'^2_1 + b'^2_2 + b'^2_3 = 1. \end{cases}$$

La courbe (a) ou (B) est une conique sphérique et la courbe (A) ou (b) est une autre conique sphérique ayant mêmes plans de symétrie. Ces coniques sont *homofocales*.

Pour le voir, supposons choisie une première conique

sphérique arbitraire, que je prends pour conique (a). Cette conique pourra être définie par le cône (q)

$$(18) \qquad \frac{x^2}{L} + \frac{y^2}{M} + \frac{z^2}{N} = 0,$$

qui sera le cône directeur des tangentes de la courbe C. La quadrique Q sera alors l'une des quadriques du faisceau ponctuel

$$(19) \qquad \left(1 + \frac{\lambda}{L}\right)x^2 + \left(1 + \frac{\lambda}{M}\right)y^2 + \left(1 + \frac{\lambda}{N}\right)z^2 = 1,$$

de sorte que

$$(20) \qquad l^2 = 1 + \frac{\lambda}{L}, \quad m^2 = 1 + \frac{\lambda}{M}, \quad n^2 = 1 + \frac{\lambda}{N}.$$

La constante λ choisie, la quadrique Q est connue, ainsi que la conique (b) intersection de la sphère avec la quadrique Q_1,

$$(21) \qquad \frac{Lx^2}{L+\lambda} + \frac{My^2}{M+\lambda} + \frac{Nz^2}{N+\lambda} = 1,$$

qui est d'ailleurs la polaire réciproque de Q par rapport à la sphère. Le cône (q_1) de sommet à l'origine et de directrice (b) a pour équation

$$(22) \qquad \frac{x^2}{L+\lambda} + \frac{y^2}{M+\lambda} + \frac{z^2}{N+\lambda} = 0,$$

ce qui prouve bien que les deux coniques (a) et (b) sont homofocales. Ce sont d'ailleurs deux coniques homofocales quelconques, dont l'ensemble dépend des quatre paramètres homogènes L, M, N, λ ou des trois constantes l, m, n. Ces coniques choisies, comment achever?

Supposons donc que sur la conique (a) j'ai exprimé (a'_1, a'_2, a'_3) en fonction d'un certain paramètre t : on a posé $da_1 = a'_1\, d\alpha$; α sera lui-même fonction du para-

mètre t et je pourrai écrire $d\alpha = \mathcal{F}(t)\,dt$. Je vais donc écrire, t et t_1 étant deux variables indépendantes :

$$(23)\quad \begin{cases} a'_1 = f_1(t), \quad a'_2 = f_2(t), \quad a'_3 = f_3(t), \quad \dfrac{d\alpha}{dt} = \mathcal{F}(t), \\ f_1^2(t) + f_2^2(t) + f_3^2(t) = 1, \\ l^2 f_1^2(t) + m^2 f_2^2(t) + n^2 f_3^2(t) = 1, \end{cases}$$

$$(24)\quad \begin{cases} b'_1 = l f_1(t_1), \quad b'_2 = m f_2(t_1), \quad b'_3 = n f_3(t_1), \\ \dfrac{d\beta}{dt} = \mathcal{F}_1(t_1); \end{cases}$$

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} (\mathrm{S}) \begin{cases} x = \displaystyle\int f_1(t)\mathcal{F}(t)\,dt + l\int f_1(t_1)\mathcal{F}_1(t_1)\,dt_1, \\ y = \displaystyle\int f_2(t)\mathcal{F}(t)\,dt + m\int f_2(t_1)\mathcal{F}_1(t_1)\,dt_1, \\ z = \displaystyle\int f_3(t)\mathcal{F}(t)\,dt + n\int f_3(t_1)\mathcal{F}_1(t_1)\,dt_1; \end{cases} \\ (\mathrm{S}_1) \begin{cases} \mathrm{X} = l\displaystyle\int f_1(t)\mathcal{F}(t)\,dt + \int f_1(t_1)\mathcal{F}_1(t_1)\,dt_1, \\ \mathrm{Y} = m\displaystyle\int f_2(t)\mathcal{F}(t)\,dt + \int f_2(t_1)\mathcal{F}_1(t_1)\,dt_1, \\ \mathrm{Z} = n\displaystyle\int f_3(t)\mathcal{F}(t)\,dt + \int f_3(t_1)\mathcal{F}_1(t_1)\,dt_1; \end{cases} \end{cases}$$

$$(25)\quad \begin{aligned} ds^2 = {} & \mathcal{F}^2(t)\,dt^2 + \mathcal{F}_1^2(t_1)\,dt_1^2 \\ & + 2[l f_1(t) f_1(t_1) + m f_2(t) f_2(t_1) + n f_3(t) f_3(t_1)] \\ & \times \mathcal{F}(t)\mathcal{F}_1(t_1)\,dt\,dt_1. \end{aligned}$$

Je remarquerai que, dans certains cas, il sera plus avantageux d'opérer indépendamment sur (a) et sur (b) pour obtenir des expressions paramétriques; dans ce cas on écrirait

$$(24')\quad \begin{cases} b'_1 = \varphi_1(t_1), \quad b'_2 = \varphi_2(t_1), \quad b'_3 = \varphi_3(t_1), \quad \dfrac{d\beta}{dt} = \mathcal{F}_1(t_1), \\ \varphi_1^2(t_1) + \varphi_2^2(t_1) + \varphi_3^2(t_1) = 1, \\ \dfrac{\varphi_1^2(t_1)}{l^2} + \dfrac{\varphi_2^2(t_1)}{m^2} + \dfrac{\varphi_3^2(t_1)}{n^2} = 1, \end{cases}$$

et l'on écrirait pour (S) et (S_1)

$$(\Gamma)\begin{cases}(S) & x = \int f_1(t)\,\mathcal{F}(t)\,dt + \int \varphi_1(t_1)\,\mathcal{F}_1(t_1)\,dt_1.\\ (S_1) & X = l\int f_1(t)\,\mathcal{F}(t)\,dt + \frac{1}{l}\int \varphi_1(t_1)\,\mathcal{F}_1(t_1)\,dt_1.\end{cases}$$

Ce premier type de solutions dépend de trois constantes arbitraires et de deux fonctions arbitraires d'une variable. La donnée des coniques homofocales (a) et (b) permet de calculer les fonctions $f_1, f_2, f_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$; la donnée de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_1$ fixe ensuite S : mais pour avoir S_1, il faut avoir l, m, n eux-mêmes, tandis que dans les calculs donnant S il suffisait d'avoir l^2, m^2, n^2. Or si l'on change l en $-l$, on remplace S_1 par sa symétrique relativement au plan yOz, ce qui est indifférent à notre point de vue. Donc on pourra choisir arbitrairement les déterminations de l, m, n et l'on a bien *une seule surface correspondant à* S. Mais au point de vue du problème de géométrie sphérique posé au n° 2, nous avons *huit* correspondances ponctuelles possibles entre les points de (a) et (b). Au point de vue de notre problème, si nous opérons avec les formules (I) qui ne contiennent que les fonctions f_1, f_2, f_3 et ne contiennent pas les lettres φ, nous voyons qu'en prenant toutes les combinaisons de signe pour l, m, n nous obtenons bien *huit* couples de *deux* surfaces associées.

Quand les surfaces S et S_1 sont-elles réelles? Un premier cas évident est celui où l, m, n, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_1$ sont des constantes ou fonctions réelles. Comme on a

$$l^2 = \frac{L+\lambda}{L}, \qquad m^2 = \frac{M+\lambda}{M}, \qquad n^2 = \frac{N+\lambda}{N},$$

cela entraîne que les deux cônes homofocaux (q) et (q_1) n'aient pas de génératrices communes réelles ; (a) et (b)

n'ont donc pas de points communs réels; si nous les supposons toutes deux dans le même hémisphère, ce qui est permis, on pourra donc les considérer toutes deux comme *ellipses sphériques* relatives à deux points F et F′ de cet hémisphère : sous ces rectrictions, (b) sera l'une quelconque des ellipses homofocales à l'ellipse (a).

Il y a un autre cas évident, analogue à celui des surfaces minima; on supposera l, m, n imaginaires mais de module égal à l'unité; on pourra choisir pour t et t_1 des variables conjuguées; les fonctions f_1, f_2, f_3, $\mathfrak{F}$ auront respectivement pour conjuguées φ_1, φ_2, φ_3, $\mathfrak{F}_1$. En donnant à t toutes les valeurs du champ complexe et prenant toujours pour t_1 l'imaginaire conjuguée de t, on aura tous les points réels de S et S_1; cette fois les réseaux C, Γ, C_1 et Γ_1 sont imaginaires.

Il est bon de démontrer que ce cas est bien le seul à se présenter pour la réalité quand les réseaux de translation sont *imaginaires*. Si l'on admet que S et S_1 doivent être réelles toutes deux, c'est immédiat. Mais, à la rigueur, il aurait pu se faire que S par exemple soit réelle et S_1 imaginaire, de sorte qu'il faut démontrer rigoureusement ce point. Cela aura d'ailleurs pour la suite l'avantage de nous donner une forme intéressante des nombres l, m, n, L, M, N, λ.

Si la surface S est réelle, les courbes C et Γ sont deux à deux imaginaires conjuguées; les cônes directeurs des tangentes, c'est-à-dire (q) et (q_1) sont imaginaires conjuguées. Appelons L′, M′, N′ les quantités imaginaires conjuguées de L, M, N; on aura

$$(26) \qquad \frac{L+\lambda}{L'} = \frac{M+\lambda}{M'} = \frac{N+\lambda}{N'}.$$

Posons

$$L = \rho\, e^{i\varphi}, \qquad M = \rho_1\, e^{i\varphi_1}, \qquad N = \rho_2\, e^{i\varphi_2};$$

soit $k_1 + ik_2$ la valeur commune des rapports (26) : on a immédiatement, si $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$,

$$(27)\qquad \begin{cases} \rho\cos\varphi + \lambda_1 = (\quad k_1\cos\varphi + k_2\sin\varphi)\rho, \\ \rho\sin\varphi + \lambda_2 = (-k_1\sin\varphi - k_2\cos\varphi)\rho; \end{cases}$$

par élimination de ρ, on a

$$(28)\qquad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{(k_1 - 1)\cos\varphi - k_2\sin\varphi}{k_2\cos\varphi - (k_1 - 1)\sin\varphi}.$$

Cette relation est vérifiée encore si φ est remplacé par φ_1 ou φ_2; notre méthode a écarté $\lambda = 0$ puisque alors on aurait $l^2 = m^2 = n^2 = 1$; l'équation (28) est du premier degré en tang φ; si tang φ_1, tang φ_2, tang φ_3 étaient égales, L, M, N seraient proportionnels à trois nombres réels, le cône (q) serait réel, cas qui n'est pas réalisé ici; donc la fraction en tang φ qui est au second membre de (28) doit se réduire à une constante indépendante de φ, autrement dit $(k_1 - 1)(k_1 + 1) + k_2^2 = 0$; $k_1 + ik_2$ est donc une certaine imaginaire de module unité, soit $e^{i\omega}$. Or je peux sans changer (q) ni (q_1) multiplier L, M, N et λ par $e^{-\frac{i\omega}{2}}$, auquel cas L′, M′, N′ sont multipliés par $e^{\frac{i\omega}{2}}$, la valeur commune des rapports (26) a été ainsi ramenée à l'unité et l'on a

$$\lambda = L' - L = M' - M = N' - N;$$

autrement dit, L, M, N ont même partie imaginaire et λ est une imaginaire pure; puis

$$l^2 = 1 + \frac{\lambda}{L} = \frac{L'}{L}, \qquad m^2 = \frac{M'}{M}, \qquad n^2 = \frac{N'}{N}$$

et l'on a bien retrouvé le résultat annoncé.

Il y a une autre circonstance intéressante à signaler

au point de vue de la théorie générale de l'application; supposons que les deux coniques (a) et (b) soient réelles toutes deux, mais se coupent en des points réels (en vertu des symétries, les huit points d'intersection sont tous réels); la conique (a) donne trois fonctions réelles $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, et la conique (b) trois fonctions réelles $\varphi_1(t_1)$, $\varphi_2(t_1)$, $\varphi_3(t_1)$. En choisissant $\mathcal{F}(t)$ et $\mathcal{F}_1(t_1)$ réelles, la surface S est réelle à réseaux de translation réels et l'on voit aisément que deux des rapports $\frac{L+\lambda}{L}$, $\frac{M+\lambda}{M}$, $\frac{N+\lambda}{N}$ sont positifs et l'autre négatif : si par exemple $L > M > N$, $L+\lambda$ et L sont tous deux positifs, $N+\lambda$ et N sont négatifs, puisque les cônes (q) et (q_1) sont réels, et $M+\lambda$ et M sont de signe contraire, sinon (a) et (b) seraient non sécantes; alors l et n sont réels, m est une imaginaire pure; les coordonnées X et Z sont réelles et Y est une imaginaire pure, la surface S est réelle et la surface S_1 est imaginaire; si l'on pose $Y = iY'$, on a deux surfaces réelles $S(x, y, z)$ et $S'(X, Y' = iY, Z)$ telles que

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dX^2 + dZ^2 - dY'^2.$$

M. Darboux a attiré l'attention sur cette particularité lorsque l'on cherche les surfaces correspondant à un élément réel donné (*Théorie des surfaces*, t. III, p. 225). Il est même intéressant de remarquer qu'ici on peut écrire sous ces hypothèses

$$dx^2 + dy^2 + dY'^2 = dX^2 + dZ^2 - dz^2;$$
$$dx^2 + dY'^2 + dz^2 = dX^2 + dZ^2 - dy^2$$

et

$$dY'^2 + dy^2 + dz^2 = dX^2 + dZ^2 - dx^2,$$

de sorte que nous avons non pas un seul couple, mais quatre couples de surfaces de translation mis en évi-

dence d'un seul coup :

$$(29)\quad \begin{cases} x, & y, & z; & X, & iY', & Z; \\ x, & y, & Y'; & X, & iz, & Z; \\ x, & Y', & z; & X, & iy, & Z; \\ Y', & y, & z; & X, & ix, & Z, \end{cases}$$

tels que dans chaque couple une seule des deux surfaces soit réelle avec un réseau de translation réel. En changeant ensuite une des trois fonctions φ de signe, nous aurons même *trente-deux* couples.

(*A suivre.*)

[O'5c]

NOTE SUR LES CONGRUENCES DE NORMALES;

PAR M. BAYARD,
Élève à l'École Polytechnique.

Cette Note a pour but de démontrer géométriquement la réciproque du théorème suivant : *Les plans tangents à la surface focale d'une congruence de normales, aux points de contact d'une droite de la congruence, sont orthogonaux*, c'est-à-dire la proposition : *Si les plans tangents à la surface focale d'une congruence de droites, aux points de contact d'une quelconque de ces droites, sont orthogonaux, la congruence proposée est une congruence de normales.*

Considérons sur l'une des nappes Σ de la surface focale les courbes (γ) telles que leurs tangentes soient des droites de la congruence. Ces courbes (γ) forment

un système simplement infini sur Σ (car elles dépendent évidemment d'une équation différentielle du premier ordre). L'ensemble des tangentes à une courbe (γ) quelconque forme une développable Δ circonscrite à Σ', l'autre nappe de la focale. Le plan tangent à Δ le long d'une génératrice D est tangent à Σ', donc normal à Σ au point de contact de D et Σ. Le plan osculateur de (γ) étant en chaque point normal à Σ, (γ) est une géodésique de Σ.

Le système simplement infini de courbes (γ) admet un système de trajectoires orthogonales (φ). Soit Φ une courbe (φ) arbitraire. D'après une propriété connue des géodésiques, la longueur de courbe γ comprise entre Φ et une autre courbe (φ) quelconque est la même pour toutes les courbes (γ).

Considérons pour chaque courbe (γ) sa développante G dont le point de rebroussement est en P sur la courbe Φ. L'ensemble simplement infini de ces courbes G engendre une surface S. Soit D une tangente quelconque de γ. Le segment MN compris entre le point de contact et la développante G est évidemment égal à l'arc MP mesuré sur la courbe γ.

Cela posé, nous disons qu'une droite quelconque D_i de la congruence est normale à la surface S au point N_i. En effet, soient γ_i et φ_i les courbes γ et φ passant par M_i point où D_i touche la nappe Σ. La développante Δ_i, d'arête de rebroussement γ_i, coupe S suivant une courbe G_i qui passe par N_i. La droite D_i est évidemment orthogonale à G_i, développante de γ_i. En outre, l'ensemble des droites D, qui touchent Σ en un point de la courbe φ_i, forme une surface réglée qui coupe S suivant une certaine courbe F_i passant par N_i. La longueur $M'N'$ de génératrice comprise entre φ_i et F_i est constante puisque égale à l'arc $M'P'$ de géodésique.

Or ce segment constant M'N' est normal en tout point M' au lieu de M' qui est φ_i; donc il est aussi normal en tout point N' au lieu de N' qui est F_i (d'après un théorème connu de Géométrie infinitésimale).

La droite D_i étant normale à deux courbes G_i et F_i tracées sur S est donc normale à S. La congruence considérée est donc une congruence de normales.

CONCOURS SPÉCIAL D'AGRÉGATION DE 1919. SOLUTION DU PROBLÈME DE MÉCANIQUE;

PAR M. ET. DELASSUS.

I. *Deux points matériels pesants* M, M', *de même masse m, sont reliés par un fil flexible de masse négligeable. Ils sont placés sur un plan incliné fixe, faisant un angle* α *avec le plan horizontal.*

Étudier le mouvement du système et spécialement le mouvement du point M *par rapport à des axes de directions fixes issus du milieu* G *du fil:*

1° *En supposant le fil inextensible;*

2° *En supposant le fil élastique; on admettra dans ce cas que la tension du fil est* $mk^2\frac{r-\rho}{\rho}$, *où m désigne la masse donnée de* M, k^2 *un coefficient constant,* 2ρ *la longueur naturelle du fil,* $2r$ *sa longueur actuelle. Comment, dans cette hypothèse, doit-on choisir les conditions initiales pour que le fil reste tendu pendant toute la durée du mouvement? Peut-on choisir ces conditions initiales de manière que le fil conserve une longueur constante* $2r \geqq 2\rho$?

II. *Un tube circulaire matériel de rayon* R *est fixé à plat, sur le plan incliné. Le fil, supposé inextensible, est placé à l'intérieur de ce tube, avec les deux points pesants attachés aux deux extrémités; il affecte donc, une fois tendu, la forme d'un arc de cercle dont on appellera* $2\varphi \leqq 2\pi$ *l'angle au centre correspondant.*

On imprime au plan incliné un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire donnée ω, *autour d'un axe vertical fixe* Δ. *On suppose que le point où l'axe* Δ *perce le plan incliné est sur la même ligne de plus grande pente que le centre du tube circulaire, plus bas que lui, la distance qui les sépare étant* $\frac{g \sin\alpha}{\omega^2 \cos^2\alpha}$.

Trouver et discuter les positions d'équilibre relatif du fil supposé tendu. La longueur 2ρ *du fil étant donnée, à quelles conditions doit satisfaire* R *pour qu'il y ait au moins une position d'équilibre stable?*

III. *On enlève le tube circulaire; les deux points pesants* M *et* M', *reliés par le fil, supposé inextensible, sont de nouveau placés sur le plan incliné auquel on continue à imprimer un mouvement de rotation uniforme autour de* Δ.

1° *Déterminer le mouvement du milieu* G *du fil par rapport au plan incliné. Existe-t-il pour ce point des positions d'équilibre? Étudier leur stabilité. Étudier les mouvements de* G *dans lesquels le point ne s'éloigne pas à l'infini; montrer qu'il tend alors, quand* t *augmente indéfiniment, vers une position limite, et reconnaître dans quels cas la trajectoire du point* G *admet ce point limite comme point asymptote.*

Le point G *étant placé initialement sur celle des lignes de plus grande pente du plan incliné qui rencontre l'axe* Δ, *à quelle condition doit satisfaire la direction de sa vitesse initiale pour que, dans son mouvement ultérieur, il ne s'éloigne pas à l'infini?*

2° *Déterminer et discuter le mouvement du point* M *par rapport à des axes issus de* G *et de directions invariablement liées au plan incliné. Le point* M *admet-il par rapport à ces axes des positions d'équilibre? Étudier leur stabilité. Calculer la tension du fil et chercher si, le fil étant tendu au début du mouvement, il peut cesser d'être tendu dans le cours du mouvement.*

N. B. — On négligera les frottements et l'on admettra, dans la partie III, *que les points* M *et* M' *ne peuvent pas se détacher du plan incliné.*

SOLUTION.

Pour éviter les répétitions, commençons par établir certaines formules et rappeler quelques résultats.

Prenons comme axes attachés au plan incliné tournant : Oz normale ascendante, Ox ligne de plus grande pente ascendante et Oy horizontale, le point O étant le pied de l'axe vertical Δ. Tout point X, Y, O du plan aura une vitesse résultante de sa vitesse relative et de la vitesse d'entraînement due à la rotation ω ; ses composantes seront

$$u = X' - \omega Y \cos\alpha, \qquad v = Y' + \omega X \cos\alpha, \qquad w = \omega Y \sin\alpha,$$

et celles de son accélération

$$u' - \omega v \cos\alpha = X'' - 2\omega \cos\alpha\, Y' - \omega^2 \cos^2\alpha\, X',$$
$$v' + \omega u \cos\alpha - \omega w \sin\alpha = Y'' + 2\omega \cos\alpha\, X' - \omega^2 Y,$$
$$w' + \omega v \sin\alpha = 2\omega \sin\alpha\, Y' + \omega^2 \sin\alpha \cos\alpha\, X.$$

Si, considérant deux points M, M′, de même masse, nous introduisons leur centre de gravité ξ, η et désignons par $\xi \pm x$, $\eta \pm y$ les coordonnées de ces deux points, on aura les vitesses

$$\begin{gathered}\xi' - \omega\eta\cos\alpha \pm (x' - \omega y\cos\alpha),\\ \eta' + \omega\xi\cos\alpha \pm (y' + \omega x\cos\alpha),\\ \omega\eta\sin\alpha \pm \omega y\sin\alpha;\end{gathered}$$

d'où pour la force vive

$$\begin{aligned}2T = {} & 2m[(\xi' - \omega\eta\cos\alpha)^2 + (\eta' + \omega\xi\cos\alpha)^2 + \omega^2\eta^2\sin^2\alpha]\\ & + 2m[(x' - \omega y\cos\alpha)^2 + (y' + \omega x\cos\alpha)^2 + \omega^2 y^2\sin^2\alpha].\end{aligned}$$

Nous désignerons par $\theta + \frac{\pi}{2}$ et $\theta - \frac{\pi}{2}$ les inclinaisons de GM et GM′ sur Ox, de sorte que nous aurons à faire, dans cette formule,

$$x = -r\sin\theta, \qquad y = r\cos\theta.$$

Rappelons enfin que tout système de Lagrange à fonction génératrice 2G indépendante du temps, c'est-à-dire à intégrale des forces vives, donne, pour les paramètres, les équilibres

$$\frac{\partial G_0}{\partial q_1} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial G_0}{\partial q_u} = 0$$

et que, dans le cas d'un seul paramètre, le théorème de Lagrange sur la stabilité s'applique ainsi que sa réciproque [1]. Les équilibres donnant maximum de G_0 sont stables et tous les autres sont instables.

I. 1° On a $\omega = 0$, $r = \text{const.}$; donc

$$2G = 2m[\xi'^2 + \eta'^2 + r^2\theta'^2] - 4mg\xi\sin\alpha$$

---

[1] Delassus, *Leçons sur la dynamique des systèmes matériels* (Chap. III, § 102, p. 114, et Chap. VI, § 154, p. 213).

se décomposant en

$$2G_{\xi,\eta} = \xi'^2 + \eta'^2 - 2g\xi \sin\alpha$$

qui indique le mouvement parabolique de G, et en

$$2G_\theta = \theta'^2$$

qui indique la rotation uniforme autour de G.

Quant à la tension, on l'obtient en écrivant l'équation, suivant Oy, du mouvement de M et l'on trouve la valeur constante et positive $\frac{mr\theta'^2}{2}$.

2° On a $\omega = 0$; r est variable et l'on a la fonction de force supplémentaire

$$-mk^2 \frac{r^2 - 2\rho r}{2};$$

donc

$$2G = 2m[\xi'^2 + \eta'^2 - 2g\xi \sin\alpha]$$
$$+ 2m\left[r'^2 + r^2\theta'^2 - k^2 \frac{r^2 - 2\rho r}{2}\right].$$

Il y a encore décomposition. Le premier morceau donne le mouvement parabolique de G et le second le mouvement autour de G. Ce second morceau est dans le cas régulier d'intégration et donne

$$r^2\theta' = C, \qquad r^2 r'^2 = \left[h - k^2 \frac{r^2 - 2\rho r}{2}\right] r^2 - C^2 = F(r).$$

$F(r)$ développée n'a que deux variations et les substitutions 0, r_0, $+\infty$ donnent $-$, $+$, $-$ donc oscillation périodique de r entre deux valeurs d'arrêt r_1, r_2.

Pour que le fil reste tendu, il faut $r_1 > \rho$; donc

$$F(\rho) < 0,$$

inégalité qui, traduite en r'_0 et θ'_0 est quadratique de la forme hyperbolique, donc peut toujours être vérifiée en quantités réelles.

Pour que r reste constant il faut $r'_0 = 0$ et

$$F'(r_0) = 0,$$

égalité qui détermine θ'^2_0 et la valeur trouvée est positive par suite de l'hypothèse $r_0 > \rho$.

III. Nous traiterons cette partie avant la seconde, car elle est la généralisation naturelle de la première.

On a $\omega \neq 0$ et r constant; donc fonction $2G$ se décomposant en deux morceaux qui, après suppression de facteurs constants et positifs et de termes équivalents à zéro comme constantes ou dérivées exactes, se réduisent à

$$\begin{aligned} 2G_{\xi,\eta} &= (\xi' - \omega\eta\cos\alpha)^2 \\ &\quad - (\eta' + \omega\xi\cos\alpha)^2 + \omega^2\eta^2\sin^2\alpha - 2g\xi\sin\alpha, \\ 2G_\theta &= \theta'^2 + \omega^2\sin^2\alpha\cos^2\theta \end{aligned}$$

et donnent séparément le mouvement de G et le mouvement autour de G.

1° *Étude du mouvement de* G. — La fonction $2G_{\xi,\eta}$ est une forme quadratique à coefficients constants de ξ, η, ξ', η'. Donc les équations de Lagrange sont linéaires et à coefficients constants :

$$\begin{aligned} \xi'' - 2\omega\cos\alpha\eta' - \omega^2\cos^2\alpha\xi + g\sin\alpha &= 0, \\ \eta'' + 2\omega\cos\alpha\xi' - \omega^2\eta &= 0. \end{aligned}$$

On a la solution particulière évidente

$$\xi = \frac{g\sin\alpha}{\omega^2\cos^2\alpha} = a, \qquad \eta = 0,$$

donnant une trajectoire réduite à un point Ω de l'axe Ox et les équations sans seconds membres donnent l'équation caractéristique bicarrée

$$(s^2 - \omega^2\cos^2\alpha)(s^2 - \omega^2) + 4\omega^2 s^2\cos^2\alpha = 0,$$

dont les quatre racines $\pm s_1$, $\pm s_2$ ne présentent que les deux cas suivants :

$$\cos\alpha < \frac{1}{3} : s_1 \text{ et } s_2 \text{ réelles et positives ;}$$

$$\cos\alpha > \frac{1}{3} : s_1 = a - bi, \qquad s_2 = a + bi, \qquad a > 0.$$

Sans nous préocuper de mettre la solution générale sous forme réelle, nous aurons

$$\begin{aligned} \xi &= a + A\lambda_1 e^{s_1 t} + B\lambda_2 e^{s_2 t} + C\lambda_1 e^{-s_1 t} + D\lambda_2 e^{-s_2 t}, \\ \eta &= \quad\;\; A\mu_1 e^{s_1 t} + B\mu_2 e^{s_2 t} - C\mu_1 e^{-s_1 t} - D\mu_2 e^{-s_2 t}, \end{aligned}$$

les λ et les μ étant des constantes définies par

$$\lambda = \omega^2 - s^2, \qquad \mu = 2\omega s \cos\alpha$$

et A, B, C, D des constantes arbitraires déterminées par les conditions initiales.

Quand t croît indéfiniment, les exponentielles $e^{s_1 t}$, $e^{s_2 t}$ croissent indéfiniment, tandis que les exponentielles $e^{-s_1 t}$, $e^{-s_2 t}$ tendent vers zéro, de sorte que les mouvements dans lesquels G ne s'éloigne pas à l'infini sont ceux dont les conditions initiales donnent

$$A = B = 0,$$

et alors, quand t croît indéfiniment, ξ et η tendent vers a et 0 ; donc G tend asymptotiquement vers Ω. Considérons alors le coefficient angulaire de ΩG :

$$\frac{\eta}{\xi - a} = -\frac{C\lambda_1 + D\lambda_2 e^{-(s_2 - s_1)t}}{C\mu_1 + D\mu_2 e^{-(s_2 - s_1)t}};$$

si s_1 et s_2 sont réelles, l'exponentielle tend vers zéro de sorte que ΩG tend vers une position limite de coefficient angulaire $-\frac{\lambda_1}{\mu_1}$ indépendante des conditions initiales; toutes les trajectoires considérées viennent

passer en Ω avec une même tangente bien déterminée, elles ne sont pas asymptotes à ce point.

Si, au contraire, on est dans le cas $\cos\alpha > \frac{1}{3}$, on a $s_2 - s_1 = 2bi$ et l'exponentielle qui peut s'écrire

$$\cos 2bt + i \sin 2bt$$

ne tend plus vers zéro; elle admet la période $\frac{\pi}{b}$, de sorte que ΩG tourne indéfiniment autour de Ω et que la trajectoire est asymptote à ce point.

Partant d'une position initiale ξ_0, η_0 et s'imposant la condition $A = B = 0$, la vitesse initiale ξ'_0, η'_0, se trouve complètement déterminée. Si l'on considère les coefficients angulaires m et m' de ΩG et de la vitesse à l'instant initial, on aura

$$m = -\frac{C\mu_1 + D\mu_2}{C\lambda_1 + D\lambda_2}, \qquad m' = -\frac{C\mu_1 s_1 + D\mu_2 s_2}{C\lambda_1 s_1 + D\lambda_2 s_2};$$

d'où, par élimination de $\frac{C}{D}$, une relation homographique entre m et m', de sorte que si la position initiale de G se déplace sur une droite D issue de Ω, la vitesse initiale doit avoir une direction constante bien déterminée D'. Pour le cas indiqué dans l'énoncé, on avait $m = 0$, et il en résultait

$$m' = -\frac{\mu_1\mu_2(s_1 - s_2)}{\mu_2\lambda_1 s_1 - \mu_1\lambda_2 s_2} = \frac{2\omega\cos\alpha}{s_1 + s_2} = \frac{2\cos\alpha}{\sqrt{1 + 2\cos\alpha - 3\cos^2\alpha}}.$$

Les positions d'équilibre sont données par

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(G_{\xi,\eta})_0 = \omega^2\xi\cos^2\alpha - g\sin\alpha = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial\eta}(G_{\xi,\eta})_0 = \omega^2\eta = 0.$$

On trouve ainsi un point unique qui est le point Ω déjà rencontré. Partons d'une position ξ_0, η_0, choisie arbitrairement aussi voisine que nous voudrons de Ω, avec

une vitesse nulle, il n'en résultera pas $A = B = 0$, donc on aura un mouvement dans lequel G s'éloignera indéfiniment, ce qui indique que Ω est une position d'équilibre instable.

2° *Étude du mouvement autour de* G. Il est donné par la fonction $2G_\theta$, donc par l'intégrale des forces vives

$$\theta'^2 = h + \omega^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \theta.$$

Inutile de faire ici la discussion qui ne présente aucune difficulté. Pour obtenir la tension du fil, nous écrirons, en projection sur M′ M, que la force d'inertie, la pesanteur, la réaction normale du plan et la tension du fil, appliquées en M se font équilibre. Utilisant les composantes déjà données de l'accélération, nous obtiendrons pour T une expression dans laquelle ξ, η, ξ', η', ξ'', η'' disparaîtront en vertu de deux équations du mouvement de G et il restera finalement

$$T = mr[(\theta' + \omega \cos \alpha)^2 + \omega^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \theta].$$

La tension, dans tous les mouvements, reste donc indéfiniment positive et il n'y a pas à s'en occuper.

Les équilibres de θ sont fournis par

$$\frac{d \cos^2 \theta}{d\theta} = -2 \sin \theta \cos \theta = 0,$$

et leur stabilité, d'après le théorème de Lagrange et sa réciproque, par le signe de

$$\frac{d^2 \cos^2 \theta}{d\theta^2} = -4 \cos 2\theta.$$

On trouve ainsi la position MM′ parallèle à Ox $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$ équilibre instable et la position MM′ perpendiculaire à Ox $(\theta = 0)$ équilibre stable.

II. On a ici

$$\omega \neq 0, \qquad r = \text{const.} = R \sin \varphi$$

et, de plus,

$$\zeta = a + R \cos \varphi \cos \theta, \qquad \eta = R \cos \varphi \sin \theta.$$

a étant l'abscisse du point Ω déjà rencontré et qui est le centre du cercle considéré.

Après réductions on aura

$$2G = \theta'^2 + \omega^2 \sin^2 \alpha (\cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \sin^2 \varphi \cos^2 \theta)$$

donnant un mouvement dont l'étude (d'ailleurs non demandée) ne présente aucune difficulté. Sa tension se calculerait comme dans la troisième partie, mais en projetant cette fois sur la tangente au cercle dans le sens MM′ du fil. L'expression obtenue est très compliquée.

Étudions l'équilibre. En posant

$$F(\theta) = \cos^2 \varphi \sin^2 \theta + \sin^2 \varphi \cos^2 \theta,$$

l'équation d'équilibre est

$$F'(\theta) = \cos 2\varphi \sin 2\theta$$

avec la condition supplémentaire que la tension du fil soit positive et la stabilité sera fournie par le théorème de Lagrange et sa réciproque, c'est-à-dire par le signe de $F''(\theta)$.

Le calcul de la tension est ici simple, car dans le calcul de l'accélération on peut faire d'avance ξ', η', ξ'', η'', θ' et θ'' égaux à zéro. On trouve ainsi que la tension est du signe de

$$\sin(2\varphi + 2\theta).$$

L'équation d'équilibre fournit deux positions $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ pour lesquelles MM′ est perpendiculaire à Ox et une position $\theta = \frac{\pi}{2}$ pour laquelle MM′ est dirigé suivant Ox.

Si $2\varphi < \pi$, la position $\frac{\pi}{2}$ est à rejeter et les deux positions o, π sont simultanément instables ou stables suivant que 2φ est inférieur ou supérieur à $\frac{\pi}{2}$.

Si $2\varphi > \pi$, ce sont les deux positions o et π qui sont à rejeter et la position $\frac{\pi}{2}$ est instable ou stable suivant que 2φ est inférieur ou supérieur à $\frac{3\pi}{2}$.

Pour qu'il y ait des équilibres stables, il faut donc que l'on ait

$$\frac{\pi R}{2} < 2\rho < \pi R \qquad \text{ou} \qquad \frac{3\pi R}{2} < 2\rho < 2\pi R,$$

c'est-à-dire

$$\frac{2\rho}{\pi} < R < \frac{4\rho}{\pi} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\rho}{\pi} < R < \frac{4\rho}{3\pi}.$$

CERTIFICAT DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE.

Paris.

Épreuve théorique. — *Les coordonnées rectangulaires* (x_1, x_2, x_3) *d'un point* M *d'une courbe* C *sont données par les formules*

$$x_1 = \sin\omega\,[f''\cos t + f'\sin t],$$
$$x_2 = \sin\omega\,[f''\sin t - f'\sin t],$$
$$x_3 = \cos\omega\,[f + f''],$$

où ω *est une constante et* f *une fonction de* t.

1° *Déterminer la fonction* f *de telle sorte que les tangentes à la courbe appartiennent à un complexe linéaire donné* Γ.

2° *Montrer que, dans ce cas, les normales principales à la courbe* C *rencontrent une droite fixe.*

3° *Trouver les lignes asymptotiques de la surface réglée formée par les normales principales à la courbe* C.

4° *Comment doit-on choisir le complexe* Γ *pour que la courbe* C *soit cylindrique?*

Solution. — 1° Les cosinus directeurs de la tangente sont

$$\tau_1 = \sin\omega\cos t, \qquad \tau_2 = \sin\omega\sin t, \qquad \tau_3 = \cos\omega;$$

τ_3 est constant, en sorte que la courbe est une hélice portée par un cylindre de direction Ox_3.

Les moments de la tangente par rapport aux axes sont :

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -\sin\omega\cos\omega\,(f\sin t + f'\cos t),\\
\lambda_2 &= \sin\omega\cos\omega\,(f\cos t - f'\sin t),\\
\lambda_3 &= \sin^2\omega\, f'.
\end{aligned}$$

Exprimons que la tangente appartient au complexe linéaire

$$A_1\tau_1 + A_2\tau_2 + A_3\tau_3 + L_1\lambda_1 + L_2\lambda_2 + L_3\lambda_3 = 0,$$

et nous aurons pour déterminer f l'équation linéaire

$$\begin{aligned}
(1)\quad f'[L_3\sin\omega - (L_1\cos t + L_2\sin t)\cos\omega]\\
+ f\cos\omega\,(L_2\cos t - L_1\sin t)\\
+ A_1\cos t + A_2\sin t + A_3\cot\omega = 0,
\end{aligned}$$

dont l'intégration se ramène à des quadratures élémentaires.

2° Les cosinus directeurs de la binormale, puis ceux de la normale principale sont :

$$\begin{aligned}
&\beta_1 = \cos\omega\cos t, \qquad \beta_2 = \cos\omega\sin t, \qquad \beta_3 = -\sin\omega,\\
&\nu_1 = -\sin t, \qquad \nu_2 = \cos t, \qquad \nu_3 = 0.
\end{aligned}$$

La normale principale à (C) a pour équations

$$X_1\cos t + X_2\sin t = f''\sin\omega, \qquad X_3 = \cos\omega\,(f + f'').$$

Exprimons que toutes les normales rencontrent la droite

$$X_1 = aX_3 + p, \qquad X_2 = bX_3 + q,$$

et nous aurons la condition

$$f''[\sin\omega - \cos\omega\,(a\cos t + b\sin t)] - f\cos\omega\,(a\cos t + b\sin t) \\ - p\cos t - q\sin t = 0,$$

qui doit coïncider avec l'équation déduite de (1) par dérivation; l'identification donne linéairement a, b, p, q, en sorte que la droite fixe (D) prend pour équations

$$A_1 + L_1 X_3 - L_3 X_1 = 0, \qquad A_2 + L_1 X_2 - L_2 X_3 = 0.$$

3° Les coordonnées d'un point de la surface réglée formée par les normales principales auront pour expressions paramétriques

$$\xi_1 = x_1 - u\sin t, \qquad \xi_2 = x_2 + u\cos t, \qquad \xi_3 = x_3.$$

Les asymptotiques comprennent d'une part les génératrices rectilignes $t = \text{const.}$, et d'autre part des courbes qui comprennent la courbe donnée (C) : ces courbes, qui dépendent en général d'une équation de Riccati, s'obtiendront par l'intégration d'une équation linéaire, soit par quadratures.

Les coefficients du plan tangent sont

$$A_1 = \beta_1, \qquad A_2 = \beta_2, \qquad A_3 = \beta_3 + \frac{u}{f' + f'''}.$$

L'équation des lignes asymptotiques s'écrit donc

$$(\sin t\, d\xi_1 - \cos t\, d\xi_2)\cos\omega\, dt - d\xi_3\, d\left(\frac{u}{f' + f'''}\right) = 0,$$

ou, après suppression de la solution $dt = 0$,

$$2\frac{du}{u} - \frac{f'' + f^{\text{IV}}}{f' + f'''}\, dt = 0;$$

il vient immédiatement

$$u^2 = C(f' + f''').$$

4° La courbe (C) est une hélice qui sera circulaire si

$$f'^2 + f''^2 = \text{const.},$$

c'est-à-dire si

$$f'' = 0 \qquad \text{ou} \qquad f' + f''' = 0;$$

ce derniers cas, exclu des calculs précédents, correspond à une courbe C réduite à un point.

Si $f'' = 0$, on a

$$f' = a, \qquad x_1 = a \sin\omega \sin t, \qquad x_2 = -a \sin\omega \cos t,$$
$$x_3 = at \cos\omega + \text{const.};$$
$$\tau_1 = \sin\omega \cos t, \qquad \tau_2 = \sin\omega \sin t, \qquad \tau_3 = \cos\omega,$$
$$\lambda_1 = -a \sin\omega \cos\omega [\cos t + (t - k) \sin t];$$
$$\lambda_2 = -a \sin\omega \cos\omega [\sin t - (t - k) \cos t],$$
$$\lambda_3 = a \sin^2\omega.$$

Nous avons à exprimer que l'on a identiquement

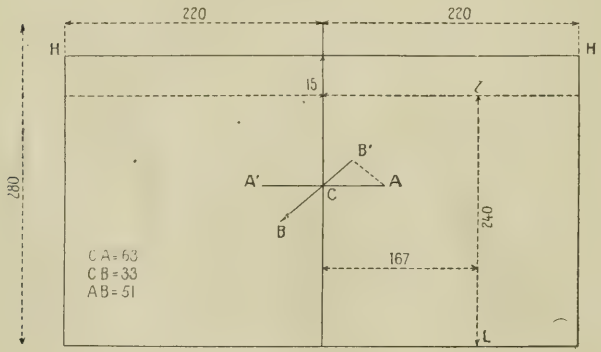
$$A_1\tau_1 + A_2\tau_2 + A_3\tau_3 + L_1\lambda_1 + L_2\lambda_2 + L_3\lambda_3 = 0,$$

ce qui donne

$$L_1 = 0, \qquad L_2 = 0, \qquad A_1 = 0, \qquad A_2 = 0;$$

d'où le complexe spécial d'axe Ox_3.

Épreuve pratique. — Perspective d'un cône avec ombres. — *Données conformes au croquis évaluées en millimètres.*



On donne sur le Tableau une ellipse de centre C *dont* AA' *et* BB' *sont deux diamètres conjugués.* AA' *est parallèle à la ligne d'horizon* HH'. *Cette ellipse est la perspective d'un cercle horizontal. Ce cercle est la base d'un cône*

droit ayant son sommet au-dessous de sa base, et dont la hauteur, évaluée à l'échelle du plan de front de l'axe, vaut 120.

Les rayons lumineux sont parallèle; L est leur point de fuite.

1° *Déterminer les points principaux* P *et* D.

2° *Représenter le cône creux et opaque par son contour apparent perspectif.*

3° *Construire l'ombre propre du cône et l'ombre portée à son intérieur.*

On déterminera un point quelconque de la courbe d'ombre portée, la tangente en ce point, ainsi que les points et tangentes remarquables.

Nota. — *Dessiner les lignes d'ombre en noir fin, les lignes de construction en rouge fin continu. Mettre sur les ombres visibles des hachures fines, bleues ou grises, espacées d'environ* $1^{mm},5$. (Juin 1919.)

CERTIFICAT DE MÉCANIQUE PHYSIQUE ET EXPÉRIMENTALE.

Paris.

Épreuve théorique. — *Un moteur à essence à quatre temps, dont la chambre de compression est du volume* $v = 1^l$, *développe à la compression une pression* $P_1 = 4\ kg : cm^2$, *tandis que, par l'explosion, la pression est portée à* $P = 16\ kg : cm^2$.

On supposera que la pression atmosphérique est

$$P_0 = 1\ kg : cm^2.$$

1° *Calculer la valeur de la compression en volume,* $\frac{V + v}{v}$, *où* V *représente le volume balayé par le piston*

dans le cylindre et v le volume déjà dit de la chambre de compression.

2° *Calculer le travail* T_{rc} *absorbé par la compression.*

3° *Calculer la pression* P′ *à la fin de la détente.*

4° *Calculer le travail* T_{rd} *accompli au cours de la détente, ainsi que le travail indiqué* T_{ri} *développé au cours du cycle.*

5° *Calculer le rendement.*

6° *Calculer en chevaux la puissance indiquée développée par le moteur marchant à* 1200 *ou à* 1800 *tours.*

On rappelle que $\frac{c'}{c} = 1,4$.

Solution. — 1° On admet que la compression est adiabatique; donc

$$\left(\frac{V+v}{v}\right)^{1,4} = 4, \qquad \frac{V+v}{v} = 2,70, \qquad V = 1^{l},70.$$

2° Si p est la pression correspondant au volume intermédiaire w, on a

$$pw^{\gamma} = p_0(V+v)^{\gamma}, \qquad \text{avec } \gamma = 1,4.$$

On en déduit, eu égard au 1°,

$$T_{rc} = \int_{v}^{V+v} p_0\left[\left(\frac{V+v}{w}\right)^{\gamma} - 1\right] dw = \frac{p_0}{\gamma - 1}(3v - \gamma V).$$

Comme on a

$$p_0 = 1 \times 10^4 \text{ kg : m}^2, \qquad 3v - \gamma V = 0^{m^3},000620,$$

il vient

$$T_{rc} = 15^{kgm},5.$$

3° La détente est supposée adiabatique et le volume final à $(V+v)$; donc

$$16\,v^{\gamma} = p'(V+v)^{\gamma}; \qquad p' = 4 \text{ kg : cm}^2.$$

4° Pendant la détente, on aura, entre la pression et le volume w, la relation

$$pw^{\gamma} = 16\,v^{\gamma} = 4(V+v)^{\gamma} = 4\,p_0.$$

Le volume est ramené de v à $V + v$; donc

$$T_{rd} = 4\,T_{rc}.$$

Le travail indiqué du cycle, mesuré par son aire, serait $5\,T_{rc}$.

5° Le moteur reçoit de l'explosion une énergie $4\,T_{rc}$, dont il restitue T_{rc} pour la compression, en sorte que l'énergie disponible est $3\,T_{rc}$. Donc

$$\varphi = \frac{3}{4} = 0,75.$$

6° Le moteur marchant à raison de 20 ou 30 tours par seconde, la puissance indiquée sera en chevaux les $\frac{20}{75}$ ou les $\frac{30}{75}$ du travail indiqué pour le cycle en kilogrammètres, soit 77,5 : cette puissance sera environ de 20 ou de 30 chevaux.

Épreuve pratique. — I. *Un frein de Prony équilibré, de* $1^{m},50$ *de bras de levier, est chargé à* 65^{kg}; *le moteur tourne à* 219 *tours par minute. On demande :* 1° *la puissance du moteur;* 2° *l'erreur commise sur la valeur de cette puissance si le levier du frein est incliné de* 10 *degrés vers le bas. On sait que le frein, non compris la charge, pèse* 250^{kg} *et que le centre de gravité est à* 10^{cm} *au-dessous de l'axe.*

Solution. — 1° On a

$$P_{ch} = \frac{\Pi.\,2\pi\,L.\,\omega}{4500},$$

avec

$$\Pi = 65^{kg}, \qquad L = 1^{m},50, \qquad \omega = 219;$$

d'où

$$P_{ch} = 30 \text{ chevaux}.$$

2° L'erreur commise sur le moment est, en excès :

$$\Pi L(1 - \cos\varepsilon) + P\lambda \sin\varepsilon,$$

ou l'erreur relative sur la puissance,

$$2\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\left(1 + \frac{P\lambda}{\Pi L}\cot\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

On a

$$P = 250^{kg}, \qquad \lambda = 0^{m},1, \qquad \frac{\varepsilon}{2} = 5^{\circ};$$

$$\sin\frac{\varepsilon}{2} = 0,087; \qquad \cot\frac{\varepsilon}{2} = 11,430.$$

L'erreur relative est de 5,8 pour 100; l'erreur absolue de $1^{ch},75$.

II. *Un essai de traction a donné les résultats suivants :*

Lecture de la balance à la limite apparente d'élasticité : 6250^{kg}.

Lecture de la balance à la charge maxima : 12400^{kg}.

Longueur après rupture : 149^{mm}.

Diamètre de la section : 9^{mm}.

Donner les résultats numériques de l'essai, sachant que le barreau a 16^{mm} *de diamètre, et que la longueur de mesure est donnée par la formule* $l = \sqrt{66,67\,S}$, S *étant l'aire de la section du barreau en millimètres carrés.*

Solution. — On a

$$S = 64\,\pi = 200^{mm^2}; \qquad l = 115^{mm}.$$

$$\text{Limite d'élasticité apparente} = \frac{6250}{200} = 31,25 \text{ kg : mm}^2.$$

$$\text{Section de rupture} = 63^{mm^2},6.$$

$$\text{Charge de rupture} = \frac{12400}{63,6} = 194,9 \text{ kg : mm}^2.$$

$$\text{Allongement de rupture} = \frac{149 - 115}{115} = 0,21.$$

(Juin 1919.)

CERTIFICAT DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE.

Lille.

Épreuve théorique. — *Démontrer la formule d'Euler qui donne le couple moteur d'une turbine hydraulique, et*

en déduire les expressions de la puissance et du rendement de ce moteur.

Établir ensuite la première équation de la théorie approchée des turbines, jusqu'à l'équation de régime inclusivement.

Solution. — Voir les cours d'Hydraulique

Épreuve pratique. — *Étudier, dans le cas suivant, le problème de la poutre droite uniformément chargée, reposant librement sur trois appuis simples :*

La poutre est plane symétriquement sur les appuis extrêmes A *et* B.

Le support intermédiaire, C, *est à égale distance de* A *et de* B, *un peu en dessous de l'horizontale* AB, *à une distance* ε *égale à la moitié de la flèche que la poutre prendrait en* C *si le troisième support était supprimé.*

Si l'on désigne par $2a$ *la distance* AB, *la longueur totale* l *de la poutre est égale à* $3a$.

Indications sur la solution. — Si l'on suppose supprimé l'appui intermédiaire, les réactions verticales des appuis A et B ont pour valeur commune $Y = \frac{3pa}{2}$, p étant la charge par unité de longueur. On en déduit que, en prenant pour origine le milieu de AB, la fibre moyenne déformée a pour équation différentielle

$$EI\,y'' = -\frac{p}{8}(4x^2 + a^2).$$

Les conditions aux limites sont $y = 0$ pour $x = a$, $y' = 0$ pour $x = 0$. On en déduit la flèche f pour $x = 0$:

$$EI\,f = \frac{5}{48}pa^4.$$

Avec l'appui intermédiaire, qui introduit une réaction verticale $Z = 2U$, les réactions des appuis A et B prennent la valeur $Y_1 = \frac{3pa}{2} - U$. L'équation nouvelle de la fibre déformée est

$$EI\,y_1'' = -\frac{p}{8}(4x^2 + a^2) + U(a - x).$$

Les conditions initiales sont : pour $x = a$, $y_1 = 0$; pour $x = 0$, $y'_1 = 0$, $y_1 = \frac{f}{2}$. On a

$$EI y_1 = -\frac{p}{8}\left(\frac{x^4}{3} - \frac{a^2 x^2}{2}\right) + \frac{U(a-x)^3}{6} + A(a-x) + B;$$

$$0 = -EI f + B;$$

$$0 = \frac{U a^2}{2} + A;$$

$$\frac{EI f}{2} = \frac{U a^3}{6} + A a + B.$$

On en déduit

$$U = \frac{5}{16} pa, \qquad Y_1 = \frac{19}{16} pa, \qquad Z = \frac{5}{8} pa.$$

Dès lors, la distribution des moments fléchissants est connue, ainsi que la forme de la fibre moyenne.

(Juin 1919.)

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1920.

Mathématiques (PREMIÈRE COMPOSITION).

I. 1° *Calculer la valeur* $m = \varphi(x_0)$ *qu'il faut attribuer à la constante* m *pour que la dérivée de la fonction*

$$f(x) = \left(2 - \frac{mx}{\sqrt{x^2 - 5}}\right) e^{\frac{x}{2}}$$

s'annule pour $x = x_0$. *Construire la courbe qui représente la fonction* $\varphi(x)$.

2° *Quelle est, suivant les diverses valeurs de m, la forme de la courbe qui représente la fonction* $f(x)$?

II. *On considère la suite des nombres* $S_1 = 1$, $S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ *définie par la formule de récurrence*

$$2S_{n+1} = S_n + \sqrt{S_n^2 + a_n},$$

où a_n *est le terme général d'une série donnée, à termes positifs,*

$$(A) \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots.$$

1° *Démontrer l'inégalité*

$$S_{n+1} < S_n + \frac{a_n}{4};$$

en conclure que S_n *tend vers une limite, pour* n *infini, si la série* (A) *est convergente.*

2° *La série* (A) *est-elle, réciproquement, convergente si* S_n *tend vers une limite pour* n *infini?*

Mathématiques (DEUXIÈME COMPOSITION).

On considère la transformation géométrique suivante : Étant donnée une origine O, *on dira qu'un point* M′ *est homologue d'un point* M, *si* M *et* M′ *sont sur une même droite passant par l'origine et si leurs rayons vecteurs* $\rho = \overline{OM}$, $\rho' = \overline{OM}$ *satisfont à la relation* $\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{a}$, *où* a *est une longueur donnée. On observera qu'un point* M *a deux homologues* M′, *la définition précédente laissant arbitraire le sens positif sur la droite* OM. *Le lieu des homologues des points d'une ligne* L *ou d'une sur-*

face S *s'appellera la ligne homologue de* L *ou la surface homologue de* S.

1° *Quelle est la ligne homologue d'un cercle passant à l'origine? La construire dans le cas où le rayon de ce cercle est* $\frac{a}{4}$.

2° *Soient* C′ *la courbe ainsi tracée et* C *le cercle donné de rayon* $\frac{a}{4}$. *Chaque point* M′ *de* C′ *est homologue d'un seul point* M *de* C. *Calculer l'aire balayée par le segment de droite* MM′, *lorsque* M′ *décrit entièrement la courbe* C′.

3° *Démontrer que la tangente* MT *en* M *à une courbe plane* L *est rencontrée par la tangente en* M′, *homologue de* M, *à la courbe homologue* L′, *en un point qui ne dépend pas de la longueur a. Comment peut-on déterminer ce point sur la droite* MT?

Comment se généralise cette propriété lorsque la courbe L *est une courbe gauche?*

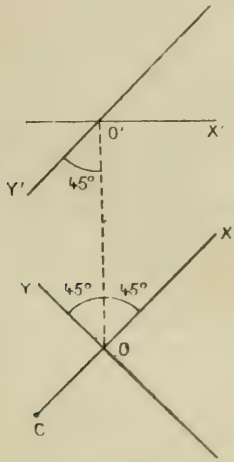
4° *En s'appuyant sur le résultat précédent, on montrera, sans calcul, qu'une propriété analogue a lieu pour les plans tangents à une surface* S *et à la surface homologue* S′; *et qu'il en résulte que la normale en* M′ *à* S′ *reste tangente à une courbe plane* E, *lorsqu'on donne à a différentes valeurs, en laissant fixes la surface* S *et le point* M *qui a* M′ *pour homologue. Quelle est la courbe* E?

5° *Quelle est la surface engendrée par* E *lorsque,* M *restant fixe sur une courbe donnée* L, *la surface* S *varie en passant constamment par cette courbe?*

Épure.

Un cylindre de révolution, de 5^{cm} *de rayon, a pour axe la droite horizontale dont les projections sont*

X et X'. *Un hyperboloïde de révolution réglé a pour axe la droite* (Y, Y') *rencontrant la droite* (X, X') *au point* (O, O'). *Une de ses génératrices est la verticale projetée horizontalement au point* C *de* X, *à* 5^{cm} *à gauche de la droite* OO'.



On demande de représenter par ses projections le solide commun au cylindre et à l'hyperboloïde.

Pour la mise en place, on se conformera aux indications du croquis : OO' *est dirigé suivant le grand axe de la feuille; le point* O *à* 6^{cm} *au-dessous du centre; le point* O' *à* 11^{cm} *au-dessus.*

QUESTIONS.

2449. Un triangle de grandeur invariable ABC prend dans un plan toutes les positions telles qu'il reste homologique à

un triangle fixe du même plan. Démontrer qu'il existe un point, entraîné avec le triangle ABC, tel que la droite, joignant ce point à un point fixe convenablement choisi, passe constamment par le centre d'homologie des deux triangles.

R. B.

2450. Un quadrangle ABCD, de grandeur invariable, se meut dans un plan de telle manière que les droites, joignant ses sommets à quatre points fixes du même plan, soient constamment concourantes. Démontrer que l'on peut trouver d'une infinité de manières un point, entraîné avec le quadrangle, tel que la droite le joignant à un point fixe passe par le point de concours des quatre premières droites. Les points satisfaisants sont ceux d'une certaine courbe du troisième ordre, et de même les points fixes correspondants.

R. B.

2451. Dans un quadrilatère ABCD inscrit dans une circonférence, dont les côtés AB, BC, CD, DA sont a, b, c, d, démontrer que :

1° Les perpendiculaires, abaissées des milieux A_1, B_1, C_1, D_1 des côtés sur les côtés opposés, concourent en un point K ;

2° Les droites de Simson de chacun des sommets, par rapport au triangle formé par les trois autres, passent aussi en K ;

3° α, β, γ étant les projections de D sur BC, CA, AB, les milieux de $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ sont sur une droite, perpendiculaire à la droite de Simson de D par rapport à ABC, qui contient le centre des moyennes distances des sommets du quadrilatère;

4° On a la relation

$$a.KA_1 + c.KC_1 = b.KB_1 + d.KD_1.$$

V. Thebault.

[O¹6k]

SURFACES DE TRANSLATION APPLICABLES L'UNE SUR L'AUTRE,

(Suite);

PAR M. BERTRAND GAMBIER,

Professeur à la Faculté des Sciences de Rennes.

Je vais maintenant donner quelques exemples de surfaces, obtenus par le procédé exposé jusqu'ici. D'après la définition des fonctions f_1, f_2, f_3 (formule 23), on a

$$(30)\qquad \begin{cases} f_1\,df_1 + f_2\,df_2 + f_3\,df_3 = 0; \\ l^2 f_1\,df_1 + m^2 f_2\,df_2 + n^2 f_3\,df_3 = 0; \end{cases}$$

d'où

$$(31)\qquad \frac{f_1\,df_1}{m^2 - n^2} = \frac{f_2\,df_2}{n^2 - l^2} = \frac{f_3\,df_3}{l^2 - m^2}.$$

Supposons donc que nous définissions la fonction α par la relation

$$(32)\qquad d\alpha = \frac{f_1\,df_1}{m^2 - n^2}\,\mathrm{P}(f_1^2),$$

où P est un polynome arbitraire d'une variable; puisque

$$f_1^2 = \mathrm{A} f_2^2 + \mathrm{B} = \mathrm{C} f_3^2 + \mathrm{D}.$$

où A, B, C, D sont des constantes, on pourra écrire la relation (32) sous la forme

$$(33)\qquad d\alpha = \frac{f_1\,df_1}{m^2 - n^2}\,P(f_1^2)$$

$$= \frac{f_2\,df_2}{n^2 - l^2}\,Q(f_2^2) = \frac{f_3\,df_3}{l^2 - m^2}\,R(f_3^2),$$

où Q et R sont deux nouveaux polynomes faciles à calculer; dans ces conditions, la courbe C donnée par les intégrales $\int f_1\,d\alpha$, $\int f_2\,d\alpha$, $\int f_3\,d\alpha$ sera manifestement une courbe algébrique, la première intégrale est obtenue en intégrant un polynome en f_1, la seconde un polynome en f_2 et de même la troisième un polynome en f_3. En opérant de même pour les intégrales $\int \varphi_1\,d\beta$, $\int \varphi_2\,d\beta$, $\int \varphi_3\,d\beta$, j'obtiendrai une infinité de surfaces algébriques de genre égal à l'unité [1].

Prenons par exemple $P \equiv 3$, alors Q et R sont égaux à 3 et la courbe C est le lieu du point $\frac{f_1^3(t)}{m^2 - n^2}$, $\frac{f_2^3(t)}{n^2 - l^2}$, $\frac{f_3^3(t)}{l^2 - m^2}$. Le calcul analogue fait en remplaçant f_1 par φ_1, f_2 par φ_2, f_3 par φ_3 et l, m, n par $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$ montre que l'on peut prendre comme courbe Γ le lieu du point

---

[1] Toutes ces surfaces sont intéressantes à étudier: elles admettent des symétries évidentes. Sur la courbe C les coordonnées x, y, z sont respectivement des polynomes impairs en f_1, f_2, f_3 qu'on peut supposer privés de terme constant, commençant par un terme de degré 3. Les racines de f_1 ou f_2 ou f_3 donnent trois séries de ligne de rebroussement dont deux seulement sont réelles; on obtient de même parmi les courbes $t_1 =$ const. trois séries de ligne de rebroussement.

$\frac{h\varphi_1^3(t_1)}{l^2(m^2-n^2)}$, $\frac{h\varphi_2^3(t_1)}{m^2(n^2-l^2)}$, $\frac{h\varphi_3^3(t_1)}{n^2(l^2-m^2)}$, où h est une constante arbitraire.

D'autre part, comme la courbe (b) est le lieu du point lf_1, mf_2, nf_3 on peut poser

$$\varphi_1(t) = lf_1(t), \qquad \varphi_2(t) = mf_2(t) \qquad \text{et} \qquad \varphi_3(t) = nf_3(t),$$

de sorte que j'écrirai définitivement pour la surface S et la surface S_1 :

$$(34)\qquad \begin{cases} (m^2-n^2)x = f_1^3(t) + hl\, f_1^3(t_1), \\ (n^2-l^2)y = f_2^3(t) + hm\, f_2^3(t_1), \\ (l^2-m^2)z = f_3^3(t) + hn\, f_3^3(t_1); \end{cases}$$

$$(35)\qquad \begin{cases} (m^2-n^2)X = l\, f_1^3(t) + h\, f_1^3(t_1), \\ (n^2-l^2)Y = m\, f_2^3(t) + h\, f_2^3(t_1), \\ (l^2-m^2)Z = n\, f_3^3(t) + h\, f_3^3(t_1); \end{cases}$$

$$(36)\qquad \begin{aligned} ds^2 = {} & \left\{ d\left[\frac{3}{2}\,\frac{f_1^2(t)}{m^2-n^2}\right]\right\}^2 + h^2\left\{ d\left[\frac{3}{2}\,\frac{f_1^2(t_1)}{m^2-n^2}\right]\right\}^2 \\ & - 2h\big[\, l\, f_1(t) f_1(t_1) \\ & \qquad + m\, f_2(t) f_2(t_1) + n\, f_3(t) f_3(t_1)\big] \\ & \times d\left[\frac{3}{2}\,\frac{f_1^2(t)}{m^2-n^2}\right] d\left[\frac{3}{2}\,\frac{f_1^2(t_1)}{m^2-n^2}\right]. \end{aligned}$$

On remarquera que pour $h = 1$ la surface S et la surface S_1 coïncident : on a alors une auto-application de la surface particulière ainsi obtenue : la courbe $t = t^0$, où t^0 est une constante numérique, est remplacée précisément par la courbe $t_1 = t^0$, courbe différente de forme, de sorte que l'on a une transformation bien distincte d'une superposition par égalité. Pour $h = -1$, S et S_1 sont symétriques, de sorte que S est encore auto-applicable. Si l'on suppose $h^2 \neq 1$, on a deux surfaces non superposables.

La circonstance qui vient de se présenter est générale :

je rappelle les formules

$$
(37)\quad \left\{
\begin{aligned}
x &= \int f_1(t)\,\bar{x}(t)\,dt + l\int f_1(t_1)\,\bar{x}_1(t_1)\,dt_1,\\
X &= l\int f_1(t)\,\bar{x}(t)\,dt + \int f_1(t_1)\,\bar{x}_1(t_1)\,dt_1,\\
ds^2 &= \bar{x}^2(t)\,dt^2 + \bar{x}_1^2(t_1)\,dt_1^2\\
&\quad + 2[l\,f_1(t)f_1(t_1) - m\,f_2(t)f_2(t_1) - n\,f_3(t)f_3(t_1)]\\
&\quad \times \bar{x}(t)\,\bar{x}_1(t_1)\,dt\,dt_1.
\end{aligned}
\right.
$$

formules qui mettent bien en évidence que si $\bar{x}_1(t) \equiv \bar{x}(t)$ les deux surfaces S et S_1 coïncident, que si $\bar{x}_1(t) \equiv -\bar{x}(t)$ les deux surfaces S et S_1 sont symétriques, mais que de toutes façons la surface S obtenue est auto-applicable, le point $(t = t^0, t_1 = t_1^0)$ étant dans l'auto-application échangé avec le point $(t = t_1^0, t_1 = t^0)$, d'ailleurs le ds^2 dans l'un ou l'autre de ces deux cas est effectivement symétrique en t et t_1.

Bien que les formules (I), sous la forme (I) ou la forme (37), soient commodes dans un certain nombre de cas, elles ont l'inconvénient de contenir six quadratures. Si on laisse toute sa généralité au problème, les six quadratures peuvent disparaître complètement.

On sait en effet obtenir par des différentiations et éliminations la courbe la plus générale dont le cône directeur des tangentes est un cône donné, car si $f(x, y, z) = 0$ est l'équation de ce cône transporté de façon que le sommet soit à l'origine, l'enveloppe du plan

$$X f'_x + Y f'_y + Z f'_z = \varphi(x, y, z) = 0,$$

où φ est une fonction homogène de même degré que f'_x, est une développable dont l'arête de rebroussement donne la solution générale.

Or, ici le cône directeur (q) est du second degré :

présentée sous cette forme, la recherche de C ne fait plus intervenir que les notions de tangente ou plan osculateur, qui se conservent dans une transformation homographique quelconque. Puisque l'équation du cône (q) a été mise sous la forme

$$(38)\qquad \left(\frac{x}{\sqrt{L}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{M}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{N}}\right)^2 = 0,$$

il suffit de remarquer que la transformation homographique

$$(39)\qquad \xi = \frac{x}{\sqrt{L}}, \qquad \eta = \frac{y}{\sqrt{M}}, \qquad \zeta = \frac{z}{\sqrt{N}}$$

transforme la courbe C en courbe minima, de façon que je n'aurai qu'à écrire que le point ξ, η, ζ a pour coordonnées les expressions classiques dans la théorie des surfaces minima, obtenues d'ailleurs précisément par la méthode indiquée ici. J'ai donc pour C :

$$(40)\qquad \left\{\begin{aligned}
x &= \sqrt{L}\left[\frac{1-u^2}{2}f''(u) + uf'(u) - f(u)\right] \\
&= \frac{\sqrt{L}}{2}\int (1-u^2)f'''(u)\,du, \\
y &= i\sqrt{M}\left[\frac{1+u^2}{2}f''(u) - uf'(u) - f(u)\right] \\
&= \frac{i\sqrt{M}}{2}\int (1+u^2)f'''(u)\,du, \\
z &= \sqrt{N}\qquad [uf'(u) - \quad f'(u)] \\
&= \sqrt{N}\int \qquad u \quad f'''(u)\,du.
\end{aligned}\right.$$

La courbe Γ s'obtient en remplaçant dans (40) u par u_1, $f(u)$ par $f_1(u_1)$ et multipliant x, y, z par l, m, n respectivement. Rappelons d'ailleurs que $l = \frac{\sqrt{L+\lambda}}{\sqrt{L}}$, $m = \frac{\sqrt{M+\lambda}}{\sqrt{M}}$, $n = \frac{\sqrt{N+\lambda}}{\sqrt{N}}$.

Je pourrai donc écrire :

$$
(S)\quad
\left\{
\begin{aligned}
x &= \sqrt{L}\left[\frac{1-u^2}{2}f''(u)-uf'(u)-f(u)\right]\\
&\quad-\sqrt{L+\lambda}\left[\frac{1-u_1^2}{2}f_1''(u_1)+u_1f_1'(u_1)-f_1(u_1)\right],\\
y &= \sqrt{-M}\left[\frac{1-u^2}{2}f''(u)-uf'(u)+f(u)\right]\\
&\quad+\sqrt{-(M+\lambda)}\left[\frac{1-u_1^2}{2}f_1''(u_1)-u_1f_1'(u_1)+f_1(u_1)\right],\\
z &= \sqrt{N}\left[u\,f''(u)-f'(u)\right]\\
&\quad-\sqrt{N+\lambda}\left[u_1\,f_1'(u_1)-f_1'(u_1)\right];
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(S_1)\quad
\left\{
\begin{aligned}
X &= \sqrt{L+\lambda}\left[\frac{1-u^2}{2}f''(u)-uf'(u)-f(u)\right]\\
&\quad-\sqrt{L}\left[\frac{1-u_1^2}{2}f_1''(u_1)+u_1f_1'(u_1)-f_1(u_1)\right],\\
Y &= \sqrt{-(M+\lambda)}\left[\frac{1+u^2}{2}f''(u)-uf'(u)+f(u)\right]\\
&\quad-\sqrt{-M}\left[\frac{1-u_1^2}{2}f_1''(u_1)-u_1f_1'(u_1)+f_1(u_1)\right],\\
Z &= \sqrt{N+\lambda}\left[u\,f''(u)-f'(u)\right]\\
&\quad-\sqrt{N}\left[u_1\,f_1''(u_1)-f_1'(u_1)\right];
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\begin{aligned}
ds^2 = {} & \frac{(L-M)(1+u^2)+(4N-2L-2M)u^2}{4}f'''^2(u)\,du^2\\
& -\frac{(L-M)(1+u_1^2)+(4N-2L-2M)u_1^2}{4}f_1'''^2(u_1)\,du_1^2\\
& -\frac{\sqrt{L}\sqrt{L+\lambda}(1-u^2)(1-u_1^2)-\sqrt{-M}\sqrt{-(M+\lambda)}(1+u^2)(1+u_1^2)+4\sqrt{N}\sqrt{N}}{2}\\
& \times f'''(u)\,f_1'''(u_1)\,du\,du_1.
\end{aligned}
$$

Dans ces formules, L, M, N, λ sont des nombres donnés ; on a pris pour $\sqrt{L}$ une détermination arbitraire, pour $\sqrt{L+\lambda}$ une détermination arbitraire et dans toutes les formules on conserve ces déterminations ; de même pour $\sqrt{-M}$, $\sqrt{-(M+\lambda)}$, $\sqrt{N}$ et $\sqrt{N+\lambda}$.

Les précautions à prendre sont les suivantes : je ne m'occupe que du cas où S et S_1 sont réelles toutes deux. Si les réseaux C, Γ, C_1 et Γ_1 sont réels, deux des nombres L, M, N sont de même signe, l'autre de signe contraire. Supposons L et N positifs, M négatif; on sait que $L+\lambda$, $M+\lambda$, $N+\lambda$ sont de même signe que L, M, N respectivement; dans ces conditions, les formules (Γ) résolvent complètement la question, on prend pour f et f_1 deux fonctions réelles des variables réelles u et u_1 respectivement. Si l'on avait obtenu L et M positifs, N négatif, il suffirait évidemment de remplacer la lettre y par la lettre z, la lettre M par la lettre N et inversement.

Si S et S_1 sont réelles mais découpées par des lignes de translation imaginaires, on prend pour u une variable complexe, pour u_1 la variable conjuguée; f et f_1 sont alors des fonctions conjuguées; nous avons vu que l'on pouvait alors supposer L, M, N imaginaires avec la même partie imaginaire, cela permet d'écrire

$$\sqrt{L}=a+\frac{ki}{a},\qquad \sqrt{M}=b+\frac{ki}{b},\qquad \sqrt{N}=c+\frac{ki}{c},$$
$$\sqrt{L+\lambda}=a-\frac{ki}{a},\qquad \sqrt{M+\lambda}=b-\frac{ki}{b},$$
$$\sqrt{N+\lambda}=c-\frac{ki}{c},$$

où a, b, c, k sont quatre constantes arbitraires réelles, et alors tout est parfaitement connu.

A titre de curiosité, on remarquera que, pour $L=M=N=1$ et $\lambda=0$, les formules (Γ) donnent précisément une surface minima.

Il est presque superflu d'ajouter que f''' et f_1''' ne doivent pas être identiquement nulles; ajouter à f ou f_1 un polynome du second degré revient à imprimer à S et S_1 une certaine translation.

Si $f_1(u) \equiv f(u)$, S et S_1 coïncident, mais S est auto-applicable par échange des courbes u et u_1. Si $f_1(u) \equiv -f(u)$, S et S_1 sont symétriques; S est encore auto-applicable.

La nouvelle forme (I') va nous permettre d'obtenir sans effort des surfaces unicursales. Je donne quelques exemples numériques simples : il suffira par exemple de prendre

$$f(u) \equiv u^3, \qquad f_1(u_1) \equiv hu_1^3.$$

Il est très simple d'obtenir des valeurs entières pour tous les nombres $\sqrt{L}$, $\sqrt{L+\lambda}$, $\sqrt{-M}$, $\sqrt{-(M+\lambda)}$, $\sqrt{N}$, $\sqrt{N+\lambda}$. Prenons en particulier

$$L = 22^2, \qquad M = -49, \qquad N = 36, \qquad \lambda = 45,$$

d'où résulte

$$L + \lambda = 23^2, \qquad M + \lambda = -4, \qquad N + \lambda = 81.$$

J'aurai pour les surfaces S et S_1 :

$$(41) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= 22(3u - u^3) + 23h(3u_1 - u_1^3), \\ y &= 7(3u + u^3) + 2h(3u_1 + u_1^3), \\ z &= 6(3u^2) \qquad + 9h(3u_1^2); \end{aligned} \right.$$

$$(42) \qquad \left\{ \begin{aligned} X &= 23(3u - u^3) + 22h(3u_1 - u_1^3), \\ Y &= 2(3u + u^3) - 7h(3u_1 + u_1^3), \\ Z &= 9(3u^2) \qquad + 6h(3u_1^2); \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} (43) \quad ds^2 = {} & 9[533(1 + u^4) - 726u^2]\,du^2 \\ & + 9h^2[533(1 + u_1^4) - 726u_1^2]\,du_1^2 \\ & + 72[130(1 + u^2u_1^2) - 123(u^2 + u_1^2) + 54uu_1] \\ & \times h\,du\,du_1. \end{aligned}$$

Si je prends $f(u) \equiv u^3$, $f_1(u) \equiv u^4$ avec les mêmes valeurs de L, M, N, λ, j'aurai deux surfaces S et S_1 admettant toutes deux comme ligne de rebroussement la courbe $u_1 = 0$ qui est une cubique gauche. J'écris les

équations de ces nouvelles surfaces :

$$(44)\quad \begin{cases} x = 22(3u - u^3) + 23(6u_1^2 - 3u_1^3), \\ y = 7(3u - u^3) - 2(6u_1^2 - 3u_1^3), \\ z = 6(3u^2) \qquad - 9(8u_1^3); \end{cases}$$

$$(45)\quad \begin{cases} X = 23(3u - u^3) - 22(6u_1^2 - 3u_1^3), \\ Y = 2(3u + u^3) \qquad 7(6u_1^2 + 3u_1^3), \\ Z = 9(3u^2) \qquad + 6(8u_1^3); \end{cases}$$

$$\begin{aligned}(46)\quad ds^2 = {} & 9\,[533(1 + u^4) - 726u^2]\,du^2 \\ & + 144u_1^2[533(1 + u_1^4) - 726u_1^2]\,du_1^2 \\ & + 288u_1[130(1 + u^2u_1^2) \\ & \qquad - 123(u^2 + u_1^2) + 54uu_1]\,du\,du_1.\end{aligned}$$

J'aurai des exemples de surfaces à réseaux de translation imaginaires en prenant par exemple

$$\sqrt{L} = 4 + i, \qquad \sqrt{L - \lambda} = 4 - i, \qquad \sqrt{M} = 2 + 2i,$$
$$\sqrt{M + \lambda} = 2 - 2i, \qquad \sqrt{N} = 1 - 4i, \qquad \sqrt{N - \lambda} = 1 - 4i;$$

en prenant

$$f(u) = u^3 \qquad \text{et} \qquad f_1(u_1) = u_1^3,$$

j'ai une surface S auto-applicable; en prenant

$$f(u) = (1 + i)u^3 \qquad \text{et} \qquad f_1(u_1) = (1 - i)u^3,$$

j'ai un couple S, S_1. J'écris d'abord pour la surface auto-applicable :

$$(47)\quad \begin{cases} x = (4 - i)(3u - u^3) - (4 - i)(3u_1 - u_1^3), \\ y = (-2 + 2i)(3u + u^3) - (2 + 2i)(3u_1 + u_1^3), \\ z = (1 + 4i)\,3u^2 \qquad + (1 - 4i)\,3u_1^2; \end{cases}$$

$$\begin{aligned}(48)\quad ds^2 = {} & 135(1 + u^4 - 6u^2)\,du^2 \\ & + 135(1 + u_1^4 - 6u_1^2)\,du_1^2 \\ & + 18[25(1 + u^2u_1^2) - 9(u^2 + u_1^2) + 68uu_1]\,du\,du_1.\end{aligned}$$

et pour le couple :

$$(49)\quad \begin{cases} x = (-3+5i)(3u-u^3)+(3-5i)(3u_1-u_1^3), \\ y = -4(3u+u^3)-4(3u_1-u_1^3), \\ z = (-3+5i)3u^2-(3+5i)3u_1^3; \end{cases}$$

$$(50)\quad \begin{cases} X = (5+3i)(3u-u^3)+(5-3i)(3u_1-u_1^3), \\ Y = 4i(3u+u^3)-4i(3u_1+u_1^3), \\ Z = (5-3i)3u^2-(5-3i)3u_1^3; \end{cases}$$

$$(51)\quad \begin{aligned} ds^2 = {} & 270i(1-u^4-6u^2)du^2 \\ & -270i(1-u_1^4-6u_1^2)du_1^2 \\ & +36[25(1+u^2u_1^2)-9(u^2-u_1^2)-68uu_1]du\,du_1. \end{aligned}$$

Pour être tout à fait complet dans la discussion, il faut examiner ce qui arrive si la quadrique Q à centre unique a une disposition particulière relative à la sphère : il n'y a que deux cas à considérer : Q est de révolution, ou bien Q est bitangente à la sphère. Dans le premier cas, il suffit dans les formules de supposer $L = N$ ou $l = n$: les courbes (a) et (b) sont des cercles parallèles de la sphère; (A) coïncide avec (b) comme nous le savons, et la correspondance ponctuelle entre A et a s'obtient par les méridiens passant par l'axe commun de (a) et (A). C, C_1, Γ, Γ_1 sont des hélices quelconques tracées sur des cylindres ayant même direction de génératrices.

Si la quadrique Q est bitangente à la sphère aux extrémités de l'axe des z par exemple, la conique (a) ou (B) est un grand cercle dont le plan contient Oz et la conique (A) ou (b) est un autre cercle de même définition; A et a sont les points situés à la même cote; il résulte de là que C est une courbe plane située dans le plan de (a) et que C_1 est la position prise par C si l'on rabat le plan de (a) autour de Oz pour l'appliquer sur (A); on peut dire si l'on veut que C et C_1 sont symétriques l'une de l'autre par rapport à celui des

deux bissecteurs de l'angle (A) (*a*) qui partage toutes les courbes Λa en leur milieu; Γ et Γ_1 admettent le même plan de symétrie, ce sont d'ailleurs des courbes planes aussi; de la sorte S et S_1 sont elles-mêmes symétriques l'une de l'autre et nous avons convenu d'écarter cette disposition de figure.

Si Q est à la fois de révolution et bitangente à la sphère aux extrémités de son axe de révolution, on n'obtient encore qu'un cas de symétrie, comme on le vérifie aisément,

6. Nous avons épuisé complètement le cas où la quadrique Q est à centre unique. Je me reporte au paragraphe 4 et je suppose $lm \neq 0$, $n = 0$, de sorte que Q est un cylindre du second degré admettant Oz pour axe : la courbe (*a*) est encore une conique sphérique quelconque.

Toutes les relations établies au paragraphe 4 deviennent ici :

$$(52)\quad \left\{\begin{array}{lll} A'_1 = l a'_1, & A'_2 = m a'_2, & A'_3 = 0; \\ b'_1 = l B'_1, & b'_2 = m B'_2, & b'_3 = 0; \\ l^2 a'^2_1 + m^2 a'^2_2 = 1, & & l^2 B'^2_1 + m^2 B'^2_2 = 1; \\ a'^2_1 + a'^2_2 + a'^2_3 = 1, & & B'^2_1 + B'^2_2 + B'^2_3 = 1, \end{array}\right.$$

la courbe (B) coïncide toujours avec la conique (*a*); les courbes (A) et (*b*) coïncident toutes deux avec l'un des grands cercles obtenus en coupant la sphère par les plans de symétrie de (*a*).

Si les nombres l et m sont réels, on voit aisément que la conique n'est réelle que si l^2 et m^2 ne sont pas tous deux inférieurs à l'unité; considérons la conique (*a*) comme une *ellipse* sphérique et soient alors F et F′ les deux foyers associés de cette *ellipse;* si l'on a $l^2 < 1$,

$m^2 < 1$, le grand cercle (A) est celui qui réunit F et F′ et nous verrons plus bas qu'on doit pour la réalité des points qui se correspondent dans l'application réduire (A) à l'arc inférieur à une demi-circonférence qui réunit F à F′; si l'on a $l^2 > 1$, $m^2 > 1$ le grand cercle (A) est celui des trois grands cercles de symétrie qui ne rencontre pas (a); de la sorte, on doit bien considérer de toutes façons la disposition actuelle comme cas limite de celle du paragraphe précédent.

Les formules (I) s'appliquent sans aucune modification, sauf bien entendu à tenir compte de la relation numérique $n = 0$. D'ailleurs, ici nous pourrons prendre

$$a'_1 = \frac{\cos\theta}{l}, \qquad a'_2 = \frac{\sin\theta}{l}, \qquad a'_3 = \sqrt{1 - \frac{\cos^2\theta}{l^2} - \frac{\sin^2\theta}{m^2}},$$

de sorte que l'on a

$$(\mathrm{S})\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{1}{l}\int \cos\theta\, \mathcal{F}(\theta)\, d\theta + \int \cos\theta_1\, \mathcal{F}_1(\theta_1)\, d\theta_1,\\ y &= \frac{1}{m}\int \sin\theta\, \mathcal{F}(\theta)\, d\theta + \int \sin\theta_1\, \mathcal{F}_1(\theta_1)\, d\theta_1,\\ z &= \int \sqrt{1 - \frac{\cos^2\theta}{l^2} - \frac{\sin^2\theta}{m^2}}\, \mathcal{F}(\theta)\, d\theta; \end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{H})\quad \left\{\begin{aligned} &(\mathrm{S}_1)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{X} &= \int \cos\theta\, \mathcal{F}(\theta)\, d\theta + \frac{1}{l}\int \cos\theta_1\, \mathcal{F}_1(\theta_1)\, d\theta_1,\\ \mathrm{Y} &= \int \sin\theta\, \mathcal{F}(\theta)\, d\theta + \frac{1}{m}\int \sin\theta_1\, \mathcal{F}_1(\theta_1)\, d\theta_1,\\ \mathrm{Z} &= \int \sqrt{1 - \frac{\cos^2\theta_1}{l^2} - \frac{\sin^2\theta_1}{m^2}}\, \mathcal{F}_1(\theta_1)\, d\theta_1; \end{aligned}\right.\\ &ds^2 = \mathcal{F}^2(\theta)\, d\theta^2 + \mathcal{F}_1^2(\theta_1)\, d\theta_1^2\\ &\qquad + 2\left(\frac{\cos\theta\cos\theta_1}{l} + \frac{\sin\theta\sin\theta_1}{m}\right)\mathcal{F}(\theta)\,\mathcal{F}_1(\theta_1)\, d\theta\, d\theta_1. \end{aligned}\right.$$

On voit que les courbes C et Γ_1 sont deux quel-

conques des courbes qui admettent (a) pour indicatrice sphérique des courbures. Les courbes Γ et C_1 sont des courbes planes quelconques ; sur ces courbes θ ou θ_1 est l'angle de la tangente avec Ox et $\mathcal{F}(\theta)$ ou $\mathcal{F}_1(\theta_1)$ est le rayon de courbure.

Ce second type de solutions dépend de deux constantes arbitraires et de deux fonctions arbitraires d'une variable. La connaissance effective de l, m, $\mathcal{F}(\theta)$, $\mathcal{F}_1(\theta_1)$ donne un seul couple de *deux surfaces associées* S et S_1. Mais comme plus haut la donnée de la conique (a) et du grand cercle principal ne donne que l^2, m^2 et non l, m, de sorte qu'il est possible d'obtenir du même coup *quatre couples de deux surfaces associées;* mais à une surface S correspond une surface S_1 et *une seule.*

Pour avoir immédiatement un exemple simple je n'ai qu'à répéter le calcul fait au sujet du type (I), formules (30) à (35). Je me contente de faire une homothétie de façon à avoir des formules plus élégantes et de remplacer l par $\frac{1}{a}$, m par $\frac{1}{b}$. J'obtiens ainsi, c désignant une autre constante arbitraire,

$$(53)\quad \begin{cases} x = a\cos^3\theta + c\cos^3\theta_1, \\ y = b\sin^3\theta + c\sin^3\theta_1, \\ z = \dfrac{1}{b^2-a^2}(1 - a^2\cos^2\theta - b^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}; \end{cases}$$

$$(54)\quad \begin{cases} X = \cos^3\theta + ac\cos^3\theta_1, \\ Y = \sin^3\theta + bc\sin^3\theta_1, \\ Z = \dfrac{c}{b^2-a^2}(1 - a^2\cos^2\theta_1 - b^2\sin^2\theta_1)^{\frac{3}{2}}; \end{cases}$$

$$(55)\quad ds^2 = \frac{9}{4}\sin^2 2\theta\, d\theta^2 + \frac{9c^2}{4}\sin^2 2\theta_1\, d\theta_1^2$$
$$+ \frac{9}{2}\sin 2\theta \sin 2\theta_1 (a\cos\theta\cos\theta_1 + b\sin\theta\sin\theta_1)\, c\, d\theta\, d\theta_1.$$

Le calcul revient à avoir pris

$$\mathcal{F}(\theta) = -3\cos\theta\sin\theta \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_1(\theta_1) = -3c\cos\theta_1\sin\theta_1.$$

L'intégration a été faite en supposant $b \neq a$; si $b = a$, conservant les mêmes valeurs pour $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_1$, j'aurai des surfaces unicursales :

$$(56)\quad \begin{cases} x = a\cos^3\theta + c\cos^3\theta_1, \\ y = a\sin^3\theta + c\sin^3\theta_1, \\ z = \frac{3}{2}\sqrt{1-a^2}\cos^2\theta; \end{cases}$$

$$(57)\quad \begin{cases} X = \cos^3\theta + ac\cos^3\theta_1, \\ Y = \sin^3\theta + ac\sin^3\theta_1, \\ Z = \frac{3}{2}c\sqrt{1-a^2}\cos^2\theta_1; \end{cases}$$

$$(58)\quad ds^2 = 9\cos^2\theta\sin^2\theta\,d\theta^2 - 9c^2\cos^2\theta_1\sin^2\theta_1\,d\theta_1^2 + 18\cos\theta\sin\theta\cos\theta_1\sin\theta_1\cos(\theta-\theta_1)ac\,d\theta\,d\theta_1.$$

Bien entendu, si $c = \pm 1$ dans l'un ou l'autre de ces deux exemples, je n'obtiens qu'une surface auto-applicable par échange des courbes θ et θ_1. Cela correspond à la propriété générale remarquée pour le type (I) et qui subsiste ici : pour le choix de $\mathcal{F}_1(\theta_1)$ égale à $\mathcal{F}(\theta_1)$ ou à $-\mathcal{F}(\theta_1)$, le ds^2 est symétrique en θ et θ_1, la surface S_1 est égale à S ou symétrique de S, et S est auto-applicable, par déformation, c'est-à-dire que deux régions homologues de S dans l'application ne sont ni égales ni symétriques. D'ailleurs cela saute aux yeux puisqu'une courbe $\theta =$ const. est plane et s'applique sur une courbe gauche.

L'exemple numérique se prête fort bien à signaler une propriété générale présentée par les surfaces du

type (II) dans le cas où $l^2 < 1$ et $m^2 < 1$; je pose encore $l = \frac{1}{a}$, $m = \frac{1}{b}$; le radical

$$\sqrt{1 - a^2 \cos^2 \theta - b^2 \sin^2 \theta}$$

peut s'écrire

$$\sqrt{a^2 - b^2} \sqrt{\sin^2 \theta - \frac{a^2 - 1}{a^2 - b^2}},$$

on a supposé $a^2 > 1 > b^2$; soit V l'angle aigu tel que

$$\sin V = \sqrt{\frac{a^2 - 1}{a^2 - b^2}}, \qquad \cos V = \sqrt{\frac{1 - b^2}{a^2 - b^2}};$$

pour que le point de la surface S soit réel, il faut que $V < \theta < \pi - V$ ou que $V < -\theta < \pi - V$: les valeurs $\theta = V$ et $\theta = -V$ donnent précisément les extrémités de l'arc FF′ auquel on doit réduire le grand cercle principal de la conique (a), de sorte que ce grand cercle doit bien être considéré comme une ellipse infiniment aplatie. Sur la surface S_1, si la fonction $\mathcal{F}(\theta)$ est définie pour des valeurs de θ sortant des intervalles fixés, il est clair qu'il y aura des portions de S_1 qui n'ont pas d'homologues sur S, en se bornant bien entendu aux points réels. Ces portions de S_1 sont limitées par les courbes $\theta = V$, ou $\theta = \pi - V$, ou $\theta = -V$, ou $\theta = V - \pi$: les courbes correspondantes sur S sont des courbes planes situées dans un plan horizontal et l'on voit immédiatement qu'un tel plan est plan de symétrie pour la surface S qui vient toucher ce plan tout le long de la courbe plane en question, qui est donc arête de rebroussement pour la surface S. De même si $\mathcal{F}_1(\theta_1)$ est définie pour des valeurs de θ_1 sortant des intervalles $(V, \pi - V)$ et $(V - \pi, -V)$, il existe des portions de S qui n'ont pas d'homologues réelles sur S_1, et S_1 présente des arêtes

de rebroussement avec plan de symétrie. Les exemples (53) et (54) d'une part, (56) et (57) de l'autre sont faciles à étudier à ce point de vue. Je n'y insiste pas. Dans le cas où l^2 et m^2 sont tous deux supérieurs à l'unité, cette circonstance ne se produit pas. J'ai développé les considérations de cette espèce dans un Mémoire que je publie au *Bulletin des Sciences mathématiques*.

Pour achever il suffit d'opérer comme pour le type (I) de façon à obtenir les équations explicites de S et S_1 sans quadratures. Prenons d'abord le cas où $l^2 < 1$ et $m^2 > 1$; l'équation du cône q est évidemment

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2 x^2 + m^2 y^2,$$

de sorte que je peux prendre

$$L = \frac{1}{1 - l^2}, \qquad -M = \frac{1}{m^2 - 1}, \qquad N = 1, \qquad \lambda = -1$$

et appliquer les formules (I') qui subsistent sans modification. On a

$$L - \lambda = \frac{l^2}{1 - l^2}, \qquad -(M - \lambda) = \frac{m^2}{m^2 - 1}, \qquad N - \lambda = 0.$$

Je pourrai donc poser

$$m = \frac{1}{\sin\psi}, \qquad l = \sin\varphi,$$

où φ et ψ sont des constantes. On prendra

$$\sqrt{L} = \frac{1}{\cos\varphi}, \qquad \sqrt{L - \lambda} = \operatorname{tang}\varphi, \qquad \sqrt{-M} = \operatorname{tang}\psi,$$

$$\sqrt{-(M - \lambda)} = \frac{1}{\cos\psi}.$$

et alors j'écris

$$
(\mathrm{II}')\quad
\left\{
\begin{aligned}
(\mathrm{S})\quad & x = \frac{1}{\cos\varphi}\left[\frac{1-u^2}{2}f''(u) - u\,f'(u) - f(u)\right] \\
& \qquad + \operatorname{tang}\varphi\left[\frac{1-u_1^2}{2}f_1''(u_1) + u_1 f_1'(u_1) - f_1(u_1)\right], \\
& y = \operatorname{tang}\psi\left[\frac{1-u^2}{2}f''(u) - u\,f'(u) + f(u)\right] \\
& \qquad - \frac{1}{\cos\psi}\left[\frac{1+u_1^2}{2}f_1''(u_1) - u_1 f_1'(u_1) - f_1(u_1)\right], \\
& z = u\,f''(u) - f'(u); \\
(\mathrm{S}_1)'\quad & \mathrm{X} = \operatorname{tang}\varphi\left[\frac{1-u^2}{2}f''(u) + u\,f'(u) - f(u)\right] \\
& \qquad - \frac{1}{\cos\varphi}\left[\frac{1-u_1^2}{2}f_1''(u_1) - u_1 f_1'(u_1) - f_1(u_1)\right], \\
& \mathrm{Y} = \frac{1}{\cos\psi}\left[\frac{1-u^2}{2}f''(u) - u\,f'(u) - f(u)\right] \\
& \qquad - \operatorname{tang}\psi\left[\frac{1+u_1^2}{2}f_1''(u_1) - u_1 f_1'(u_1) - f_1(u_1)\right], \\
& \mathrm{Z} = u_1\,f_1''(u_1) - f_1'(u_1); \\
& ds^2 = [\operatorname{tang}^2\varphi(1-u^2)^2 - (1+\operatorname{tang}^2\psi)(1+u^2)^2]\frac{f''^2(u)\,du^2}{4} \\
& \qquad + [\operatorname{tang}^2\varphi(1-u_1^2)^2 - (1+\operatorname{tang}^2\psi)(1+u_1^2)^2]\frac{f_1''^2(u_1)\,du_1^2}{4} \\
& \qquad + \left[\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}(1-u^2)(1-u_1^2) - \frac{\sin\psi}{\cos^2\psi}(1+u^2)(1+u_1^2)\right] \\
& \qquad \times \frac{f''(u)\,f_1''(u_1)\,du\,du_1}{2}.
\end{aligned}
\right.
$$

Dans le cas où $l^2 > 1$, $m^2 > 1$, je prendrai

$$\mathrm{L} = \frac{1}{l^2-1}, \qquad \mathrm{M} = \frac{1}{m^2-1},$$
$$\mathrm{N} = -1, \qquad \lambda = -1.$$
$$\mathrm{L} + \lambda = \frac{l^2}{l^2-1}, \qquad \mathrm{M} + \lambda = \frac{m^2}{m^2-1}, \qquad \mathrm{N} + \lambda = 0,$$

et je poserai

$$l = \frac{1}{\sin\varphi}, \qquad m = \frac{1}{\sin\psi};$$

et profitant d'une remarque faite à propos des for-

mules (40), j'écrirai

$$
(\mathrm{H}'')\quad
\left\{
\begin{array}{ll}
(\mathrm{S})\left\{
\begin{array}{ll}
x = & \operatorname{tang}\varphi\left[\frac{1-u^2}{2}f''(u)-u\,f'(u)-f(u)\right] \\
 & +\frac{1}{\cos\varphi}\left[\frac{1-u_1^2}{2}f_1''(u_1)-u_1f_1'(u_1)-f_1(u_1)\right], \\
y = & \operatorname{tang}\psi\left[u\,f''(u)-f'(u)\right] \\
 & -\frac{1}{\cos\psi}\left[u_1\,f_1''(u_1)-f_1(u_1)\right]. \\
z = & \frac{1+u^2}{2}f''(u)-u\,f'(u)+f(u):
\end{array}\right. \\
(\mathrm{S}_1)\left\{
\begin{array}{ll}
\mathrm{X} = & \frac{1}{\cos\varphi}\left[\frac{1-u^2}{2}f''(u)-u\,f'(u)-f(u)\right] \\
 & -\operatorname{tang}\varphi\left[\frac{1-u_1^2}{2}f_1''(u_1)-u_1f_1'(u_1)-f_1(u_1)\right], \\
\mathrm{Y} = & \frac{1}{\cos\psi}\left[u\,f''(u)-f'(u)\right] \\
 & -\operatorname{tang}\psi\left[u_1\,f_1''(u_1)-f_1(u_1)\right]. \\
\mathrm{Z} = & \frac{1+u_1^2}{2}f_1''(u_1)-u_1f_1'(u_1)-f_1(u_1):
\end{array}\right. \\
ds^2 = & \left[\frac{(1-u^2)^2}{4\cos^2\varphi}-\frac{u^2}{\cos^2\psi}\right]f''^2(u)\,du^2 \\
 & -\left[\frac{(1-u_1^2)^2}{4\cos^2\varphi}-\frac{u_1^2}{\cos^2\psi}\right]f_1''^2(u_1)\,du_1^2 \\
 & +\left[\frac{\sin\varphi(1-u^2)(1-u_1^2)}{2\cos^2\varphi}-2\frac{\sin\psi\,uu_1}{\cos^2\psi}\right]f''(u)f_1''(u_1)\,du\,du_1.
\end{array}
\right.
$$

Il est facile de voir pourquoi en apparence les formules (H'') cachent ce fait que certaines portions de S ou de S_1 cessent d'avoir un homologue sur l'autre surface. Il peut arriver que certaines valeurs imaginaires de u_1 ou f_1 donnent une valeur réelle aux expressions

$$\frac{1-u_1^2}{2}f_1''(u_1)+u_1f_1'(u_1)-f_1(u_1)$$

et

$$\frac{1+u_1^2}{2}f_1''(u_1)-u_1f_1'(u_1)-f_1(u_1),$$

mais rendent $u_1f_1''(u_1)-f_1'(u_1)$ imaginaire; il suffit d'appliquer cette remarque aux exemples (53), (54)

ou (56), (57) pour saisir le mécanisme. Ceci tient somme toute au même fait qu'une courbe gauche dans l'espace supposée réelle peut avoir une projection sur le plan xOy composée d'une portion provenant des points réels de la courbe et une autre portion également réelle provenant de points imaginaires.

Le seul cas particulier qui puisse se présenter est le cas $l^2 = m^2$, avec $l^2 > 1$ pour la réalité ; les formules ne cessent de s'appliquer, mais (a) est un parallèle de la sphère, et (A) le grand cercle ayant même axe. Les courbes C et Γ_1 sont alors des hélices.

On aura des exemples numériques intéressants en prenant

$$f(u) = u^3, \qquad f_1(u_1) = hu_1^3$$

ou bien

$$f(u) = u^3, \qquad f_1(u_1) = u_1^4.$$

Je retiens ce dernier dans le cas $l^2 < 1$, $m^2 > 1$: j'écris en prenant les formules (II') :

$$(59)\quad \begin{cases} x = \dfrac{3u - u^3}{\cos\varphi} + \operatorname{tang}\varphi(6u_1^2 - 3u_1^4), \\ y = \operatorname{tang}\psi(3u - u^3) - \dfrac{6u_1^2 + 3u_1^4}{\cos\psi}, \\ z = 3u^2; \end{cases}$$

$$(60)\quad \begin{cases} X = \operatorname{tang}\varphi(3u - u^3) + \dfrac{6u_1^2 - 3u_1^4}{\cos\varphi}, \\ Y = \dfrac{3u + u^3}{\cos\psi} + \operatorname{tang}\psi(6u_1^2 + 3u_1^4), \\ Z = 8u_1^3; \end{cases}$$

$$(61)\quad \begin{aligned} ds^2 = {} & [(1-u^2)^2\operatorname{tang}^2\varphi) + (1+\operatorname{tang}^2\psi)(1+u^2)^2]9\,du^2 \\ & + [(1-u_1^2)^2\operatorname{tang}^2\varphi) + (1+\operatorname{tang}^2\psi)(1+u_1^2)^2]144\,u_1^2\,du_1^2 \\ & - 72\left[(1-u^2)(1-u_1^2)\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\right. \\ & \left. - \frac{(1+u^2)(1+u_1^2)\sin\psi}{\cos^2\psi}\right] u_1\,du\,du_1. \end{aligned}$$

et il saute clairement aux yeux que pour u_1 imaginaire pure et u réel le point de la première surface est encore réel, mais que le point correspondant de la seconde est

imaginaire, et cela confirme nos prévisions. Sur la surface S le point (u, u_1) et $(u, -u_1)$, où u et u_1 sont réels tous deux, est un seul et même point qui, dans l'application de S_1 sur S, est recouvert deux fois; le point (u, iu_1), où u et u_1 sont réels, n'a pas d'homologue réel sur S_1. La courbe séparatrice sur S des régions effectivement recouvertes est la courbe $u_1 = 0$ qui est une cubique gauche ne présentant aucune singularité relative à S; mais sur la surface S_1 cette courbe $u_1 = 0$ est une cubique plane du plan xOy et est arête de rebroussement de S_1 : le plan xOy est d'ailleurs plan de symétrie de la surface S_1. Les formules (59) constituent évidemment une représentation paramétrique impropre de la surface S.

7. Nous avons épuisé complètement le cas où $lm \neq 0$ et $n = 0$. Je suppose maintenant $m = n = 0$ et $l \neq 0$.

Les formules (14) du paragraphe 4 deviennent

$$(62)\quad \begin{cases} A'_1 = l\,a'_1, & A'_2 = 0, & A'_3 = 0; \\ b'_1 = l\,B'_1, & b'_2 = 0, & b'_3 = 0; \end{cases}$$

il résulte manifestement de là que l'on peut prendre $A'_1 = 1$, $b = 1$ et en remplaçant pour plus de commodité dans l'écriture l par $\frac{1}{h}$, j'ai, en recopiant les formules (I),

$$(\mathrm{III})\quad \begin{cases} (\mathrm{S}) \begin{cases} x = h\int \vec{x}(\theta)\,d\theta + \int \vec{x}_1(\theta_1)\,d\theta_1, \\ y = \sqrt{1-h^2}\int \cos\theta\,\vec{x}(\theta)\,d\theta, \\ z = \sqrt{1-h^2}\int \sin\theta\,\vec{x}(\theta)\,d\theta; \end{cases} \\ (\mathrm{S}_1) \begin{cases} \mathrm{X} = \int \vec{x}(\theta)\,d\theta + h\int \vec{x}_1(\theta_1)\,d\theta_1, \\ \mathrm{Y} = \sqrt{1-h^2}\int \cos\theta_1\,\vec{x}_1(\theta_1)\,d\theta_1, \\ \mathrm{Z} = \sqrt{1-h^2}\int \sin\theta_1\,\vec{x}_1(\theta_1)\,d\theta_1; \end{cases} \\ ds^2 = \vec{x}^2(\theta)\,d\theta^2 + \vec{x}_1^2(\theta_1)\,d\theta_1^2 - 2h\,\vec{x}(\theta)\,\vec{x}_1(\theta_1)\,d\theta\,d\theta_1. \end{cases}$$

L'interprétation géométrique est évidente : S et S_1 sont *deux cylindres quelconques :* déroulons-les tous deux sur un même plan de façon que dans le développement les génératrices des deux cylindres fassent entre elles un angle V tel que $\cos V = h$: nous avons ainsi défini, en faisant correspondre les points des cylindres qui recouvrent un même point du plan, une application où les génératrices de l'un correspondent à une famille d'hélices de l'autre. Sur la sphère la conique (a) ou (B) est un petit cercle, et l'autre conique (A) ou (b) est réduite à un point unique, à savoir le pôle du petit cercle.

Ici on a en réalité une *déformation continue;* mais cet exemple est somme toute presque aussi banal que l'application des deux cylindres, génératrice sur génératrice. Je n'y insiste pas davantage.

(*A suivre.*)

[B12c]

DEUX NOTES DE GÉOMÉTRIE VECTORIELLE [1];

PAR M. R. GARNIER.

1. *La formule d'Euler-Savary* [2]. — Soit Σ une

---

[1] Les méthodes de la géométrie vectorielle sont encore peu familières à la plupart des étudiants français. C'est pour contribuer à les répandre que nous les avons appliquées ici à deux exemples qui nécessitent souvent, soit de pénibles calculs, soit encore des constructions géométriques assez cachées ou peu rigoureuses. Comme notations, nous avons adopté celles de l'excellent Traité de Burali-Forti et Marcolongo (*Éléments de Calcul vectoriel;* trad. par S. Lattès; Paris, Hermann, 1910).

[2] Au sujet de cette formule, on nous permettra de rappeler la belle démonstration de M. G. Kœnigs (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. XXXI, 1907); par sa simplicité et sa précision, elle devrait être classique.

sphère de centre O et de rayon 1; pour établir la formule d'Euler-Savary sur Σ, nous appliquerons les formules fondamentales de la composition des mouvements à un point mobile M qui coïnciderait constamment avec le point de contact de la courbe (mobile) C avec son enveloppe (fixe) C_1.

1. Soit $\mathbf{t}$ un vecteur unitaire, porté *dans un sens arbitraire* (mais variant avec continuité) par la tangente commune à C et à C_1 : désignons par :

$\mathbf{v}_1 = v_1\mathbf{t}$ et $\mathbf{j}_1$ la vitesse et l'accélération (absolues) de M sur C_1 ;

$\mathbf{v} = v\mathbf{t}$ et $\mathbf{j}$ la vitesse et l'accélération (relatives) de M sur C ;

Ω la rotation instantanée, de module ω.

Posons encore

$$I = O + \frac{\Omega}{\omega},$$

$$M = O + \mathbf{r},$$

d'où

$$\mathbf{r} \times \mathbf{t} = 0,$$

et faisons enfin

$$\mathbf{n} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{t}. \tag{1}$$

Ces notations introduites, la formule de la composition des mouvements pour le premier ordre s'écrira

$$v_1\mathbf{t} = (\Omega \wedge \mathbf{r}) + v\mathbf{t}; \tag{2}$$

l'arc de grand cercle IM est donc orthogonal à C et à C_1 en M, et l'on peut poser, en conséquence,

$$\Omega = \omega(\mathbf{r}\cos\lambda + \mathbf{n}\sin\lambda); \tag{3}$$

λ désignera la distance sphérique IM, comptée à partir de M dans la direction $\mathbf{n}$. Multipliée ($\times$) par $\mathbf{t}$, la relation (2) donne alors

$$v_1 = \omega\sin\lambda + v. \tag{4}$$

Appelons enfin $\mathbf{p}$ un vecteur unitaire dirigé suivant la normale principale à C, *dans un sens arbitraire*; on pourra écrire

$$\mathbf{p} = -\mathbf{r}\sin\rho + \mathbf{n}\cos\rho,$$

$\sin\rho$ désignant le rayon de courbure de C(¹); et, si l'on affecte d'accents les dérivées par rapport au temps, la première formule de Frenet donnera

$$(5) \qquad \mathbf{t}' = -v\mathbf{r} + v\cot\rho\,\mathbf{n}.$$

2. Écrivons maintenant la relation de composition pour le second ordre, soit :

$$\mathbf{j}_1 = (\Omega' \wedge \mathbf{r}) + (\Omega \times \mathbf{r})\Omega - \omega^2\mathbf{r} + 2(\Omega \wedge \mathbf{v}) + \mathbf{j},$$

et multiplions intérieurement les deux membres de la relation par $\mathbf{n}$; nous aurons successivement, d'après les propriétés de l'accélération, les équations (1), (3), (5) et la relation $\mathbf{n} \wedge \mathbf{r} = \mathbf{t}$:

$$\mathbf{j}_1 \times \mathbf{n} = v_1^2\cot\rho_1, \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{n} = v^2\cot\rho,$$

$$\begin{aligned}(\Omega' \wedge \mathbf{r})\mathbf{n} &= \omega[(\mathbf{r}'\cos\lambda + \mathbf{n}'\sin\lambda) \wedge \mathbf{r}]\mathbf{n} \\ &\quad - \omega v\cos\lambda = \omega\sin\lambda(\mathbf{r} \wedge \mathbf{n})\mathbf{n}' \\ &= -\omega v\cos\lambda - \omega\sin\lambda\,\mathbf{t} \times \mathbf{n}' \\ &= -\omega v\cos\lambda + \omega v\sin\lambda\cot\rho,\end{aligned}$$

$$\Omega \times \mathbf{r}.\Omega \times \mathbf{n} = \omega^2\sin\lambda\cos\lambda,$$

$$\mathbf{r} \times \mathbf{n} = 0,$$

$$(\Omega \wedge \mathbf{v})\mathbf{n} = \omega v[(\mathbf{r}\cos\lambda + \mathbf{n}\sin\lambda) \wedge \mathbf{t}]\mathbf{n} = \omega v\cos\lambda;$$

d'où

$$\begin{aligned}v_1^2\cot\rho_1 &= \omega v\cos\lambda + \omega v\sin\lambda\cot\rho + \omega^2\sin\lambda\cos\lambda - v^2\cot\rho \\ &= (v\cot\rho + \omega\cos\lambda)(v + \omega\sin\lambda),\end{aligned}$$

c'est-à-dire, d'après (4),

$$(6) \qquad v_1\cot\rho_1 - v\cot\rho = \omega\cos\lambda.$$

3. En particulier, faisons $M = I$, d'où $\lambda = 0$; $\mathbf{v}_1$

(¹) De sorte que $O + \mathbf{r} + \mathbf{p}\sin\rho$ désignera le centre de courbure de C.

et $\mathbf{v}$ seront égaux tous deux à

$$\mathbf{w} = \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)',$$

tandis que $\sin\rho_1$ et $\sin\rho$ devront être remplacés respectivement par $\sin\rho_f$ et $\sin\rho_m$, rayons de courbure respectifs de la base et de la roulante. La formule (6) donnera alors

$$(7) \qquad w(\cot\rho_f - \cot\rho_m) = \omega;$$

on aura ensuite, en posant

$$\mathbf{w} \times \mathbf{t} = w\cos\rho,$$

et en utilisant (1), (3) et (5):

$$\begin{aligned}(8) \qquad w\cos\rho &= \frac{1}{\omega}(\Omega' \times \mathbf{t}) - \frac{\omega'}{\omega^2}(\Omega \times \mathbf{t}) \\ &= (\mathbf{r}'\cos\lambda + \mathbf{n}'\sin\lambda) \times \mathbf{t} \\ &= v\cos\lambda - \sin\lambda\,\mathbf{n} \times \mathbf{t}' = v\,\frac{\sin(\rho - \lambda)}{\sin\rho}.\end{aligned}$$

Ceci fait, il suffira de rapprocher (4), (7) et (8) pour en déduire

$$\begin{aligned}\cot\rho_1 - \cot\rho &= \frac{\omega}{v}(\cos\lambda - \sin\lambda\cot\rho_1) \\ &= \frac{w}{v}\,\frac{\sin(\rho_1 - \lambda)}{\sin\rho_1}(\cot\rho_f - \cot\rho_m) \\ &= \frac{\sin(\rho - \lambda)\sin(\rho_1 - \lambda)}{\sin\rho\sin\rho_1}\,\frac{\cot\rho_f - \cot\rho_m}{\cos\rho},\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\cos\rho\,[\cot(\rho_1 - \lambda) - \cot(\rho - \lambda)] = \cot\rho_f - \cot\rho_m.$$

C'est la formule d'Euler-Savary pour la sphère.

Il importe d'observer que *cette formule est indépendante des conventions de sens adoptées au début:* effectivement, un changement de sens effectué sur $\mathbf{t}$ remplace λ par $-\lambda$, ρ par $\pi - \rho$, ρ_1 et ρ par $\pi - \rho_1$ et $\pi - \rho$; un résultat analogue s'applique à $\mathbf{w}$: enfin, un changement de sens sur $\mathbf{p}$ (ou $\mathbf{p}_1$) remplace ρ par $\pi + \rho$

(ou ρ_1 par $\pi + \rho_1$). Aucune de ces modifications ne change la formule ; la méthode vectorielle, et c'est là son grand avantage, affranchit donc le résultat de toute erreur de signe.

II. *Les surfaces apsidales.* — Soient O le pôle de la transformation, $M = O + \mathbf{r}$ un point d'une surface S, $\mathbf{n}$ un vecteur unitaire porté par la normale MN à S en M. Au point M, la transformation associe un point $M_1 = O + \mathbf{r}_1$ tel que

$$(1) \qquad \mathbf{r} \times \mathbf{r}_1 = 0,$$

$$(2) \qquad (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\mathbf{n} = 0,$$

$$(3) \qquad r_1 = r.$$

Nous allons déterminer le vecteur unitaire $\mathbf{n}_1$ porté par la normale $M_1 N_1$ à la surface S_1, lieu du point M_1.

Tout d'abord, l'équation (2) donne

$$\mathbf{r}_1 = \lambda \mathbf{r} + \mu \mathbf{n};$$

posons

$$(4) \qquad \mathbf{r} \times \mathbf{n} = r \cos V;$$

en vertu de (1), nous aurons

$$\lambda r + \mu \cos V = 0,$$

puis, en vertu de (3),

$$\mu^2 \sin^2 V = r^2.$$

On pourra donc écrire, par exemple,

$$\lambda = -\cot V, \qquad \mu = \frac{r}{\sin V},$$

et l'on aura

$$(5) \qquad \mathbf{r} \cos V + \mathbf{r}_1 \sin V = r\mathbf{n}.$$

Multiplions ($\times$) cette équation par $\mathbf{n}$ et tenons compte de (4); il viendra

$$(4)_1 \qquad \mathbf{r}_1 \times \mathbf{n} = r \sin V.$$

Ceci posé, l'équation (5), différentiée, devient

$$\cos V\, d\mathbf{r} + \sin V\, d\mathbf{r}_1 + (-\mathbf{r}\sin V + \mathbf{r}_1 \cos V)\, dV = r\, d\mathbf{n} + \mathbf{n}\, dr,$$

et, après multiplication intérieure par $\mathbf{n}$, on en déduit

$$\sin V\, \mathbf{n} \times d\mathbf{r}_1 = dr = \frac{1}{r} r_1\, dr_1 = \frac{1}{r} \mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_1,$$

c'est-à-dire

$$\left(\mathbf{n}\sin V - \frac{\mathbf{r}_1}{r}\right) \times d\mathbf{r}_1 = 0.$$

Cette équation devant être vérifiée quel que soit $d\mathbf{r}_1$, on en tire

$$(6) \qquad \mathbf{n}_1 = \rho\left(\mathbf{n}\sin V - \frac{\mathbf{r}_1}{r}\right);$$

les normales MN et $M_1 N_1$ sont donc *coplanaires;* elles sont en outre *rectangulaires*, car, d'après (6) et (4), on a

$$\mathbf{n} \times \mathbf{n}_1 = 0.$$

Enfin, en exprimant que $\mathbf{n}_1 = 1$, on trouve

$$\rho^2 \cos^2 V = 1;$$

on pourra donc écrire

$$(7) \qquad \mathbf{n}\sin V + \mathbf{n}_1 \cos V = \frac{\mathbf{r}_1}{r}.$$

Le caractère involutif de la transformation résulte des formules (5) et (7) qui peuvent encore s'écrire, si l'on préfère :

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 \sin V = -\mathbf{r}\cos V + r\mathbf{n}, \\ r\mathbf{n}_1 \sin V = -\mathbf{r} \qquad\quad + r\mathbf{n}\cos V, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{r}\sin(-V) = -\mathbf{r}_1 \cos(-V) + r\mathbf{n}_1, \\ r\mathbf{n}\sin(-V) = -\mathbf{r}_1 \qquad\qquad + r\mathbf{n}_1 \cos(-V), \end{cases}$$

ainsi que des formules (1), (2), (3) et de la suivante :

$$\mathbf{r} \times \mathbf{n} = r\cos V = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{n}_1.$$

Ces mêmes formules permettent encore de démontrer

aisément la permutabilité des transformations apsidale et par polaires réciproques relativement à une sphère de centre O.

[N° 1a]

UN THÉORÈME GÉNÉRAL SUR LES COMPLEXES;

PAR M. CL. SERVAIS,
Professeur à l'Université de Gand.

1. *Les cônes d'un complexe d'ordre n, relatifs aux sommets* A_1, A_2, A_3, ... A_p *d'un polygone gauche, déterminent sur les diagonales* $A_p A_2$, $A_1 A_3$, $A_2 A_4$, ..., $A_{p-1} A_1$ *qui leur sont opposées respectivement les ponctuelles*

$$(B_1),\quad (B_2),\quad (B_3),\quad \ldots,\quad (B_p)$$

telles que l'on a l'égalité

$$(a)\qquad (B_1)_{p,2}.(B_2)_{1,3}.(B_3)_{2,4}.\ldots.(B_p)_{p-1,1} = (-1)^{pn},$$

la notation $(B_k)_{k-1,k+1}$ *indiquant le produit des rapports de section* $\frac{A_{k-1}B_k}{A_{k+1}B_k}$ *de tous les points* B_k *de la ponctuelle* (B_k) *relativement aux origines* A_{k-1}, A_{k+1} *de la diagonale* $A_{k-1} A_{k+1}$ *opposée au sommet* A_k (¹).

Ce théorème est vrai pour un triangle $A_1 A_2 A_3$, car dans le plan de ce triangle les droites du complexe issues de A_1, A_2, A_3 sont tangentes à la courbe du complexe. Celle-ci étant de classe n, on a, d'après le corrélatif du théorème de Carnot :

$$(B_1)_{3,2},\ (B_2)_{1,3},\ (B_3)_{2,1} = (-1)^n.$$

(¹) On suppose que les côtés $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, ..., $A_p A_1$ du polygone ne sont pas des rayons du complexe considéré.

Il suffit donc d'établir que le théorème supposé vrai pour un polygone de $p-1$ sommets $A_1, A_2, \ldots, A_{p-1}$ l'est nécessairement pour un polygone de p sommets.

Les cônes (A_p), (A_{p-1}), (A_1) du complexe déterminent sur les côtés $A_{p-1}A_1$, A_1A_p, A_pA_{p-1} du triangle $A_pA_{p-1}A_1$ respectivement les ponctuelles (B_p), (B_{p-1}), (B'_1) et l'on a

$$(B_p)_{p-1,1}.(B'_{p-1})_{1,p}.(B'_1)_{p,p-1} = (-1)^n.$$

Le cône (A_1) du complexe détermine sur les côtés A_pA_2, A_2A_{p-1}, $A_{p-1}A_p$ du triangle $A_{p-1}A_pA_2$ les ponctuelles (B_1), (B''_1), (B'_1) : elles sont situées sur la section du cône (A_1) par le plan $A_{p-1}A_pA_2$ et, d'après le théorème de Carnot, on a

$$(B_1)_{p,2}.(B''_1)_{2,p-1}.(B'_1)_{p-1,p} = 1.$$

Le cône (A_{p-1}) du complexe détermine sur les côtés $A_{p-2}A_p$, A_pA_1, A_1A_{p-1} du triangle $A_{p-2}A_pA_1$ les ponctuelles (B_{p-1}), (B'_{p-1}) (B''_{p-1}) et l'on a de même

$$(B_{p-1})_{p-2,p}.(B'_{p-1})_{p,1}.(B''_{p-1})_{1,p-2} = 1.$$

Les cônes (A_1), (A_2), (A_3), $\ldots$, (A_{p-1}) du complexe déterminent sur les diagonales $A_{p-1}A_2$, A_1A_3, A_2A_4, $\ldots$, $A_{p-2}A_1$ du polygone $A_1A_2A_3\ldots A_{p-1}$ les ponctuelles

$$(B''_1), \quad (B_2), \quad (B_3), \quad \ldots, \quad (B''_{p-1})$$

et l'on a par hypothèse

$$(B''_1)_{p-1,2}.(B_2)_{1,3}.(B_3)_{2,4}.\ldots.(B'_{p-1})_{p-2,1} = (-1)^{(p-1)n}.$$

Les quatre égalités précédentes conduisent à

$$(B_1)_{p,2}, (B_2)_{1,3}, (B_3)_{2,4}, \ldots, (B_p)_{p-1,1} = (-1)^{pn};$$

le théorème est donc démontré.

2. Dans le cas d'un complexe linéaire, la démonstra-

tion uniquement basée sur les théorèmes de Ceva et de Ménélaüs est purement géométrique. Du théorème (n° 1) on déduit la propriété suivante :

Si un polygone $A_1 A_2 A_3 \ldots A_p$ *est inscrit dans une courbe gauche dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire* (en particulier une cubique gauche), *les plans osculateurs aux sommets* A_1, A_2, A_3, ..., A_p *rencontrent respectivement les diagonales opposées* $A_p A_2$, $A_1 A_3$, $A_2 A_4$, ..., $A_{p-1} A_1$ *en des points* B_1, B_2, B_3, ..., B_p *tels que*

$$\frac{A_p B_1}{A_2 B_1} \frac{A_1 B_2}{A_3 B_2} \frac{A_2 B_3}{A_4 B_3} \cdots \frac{A_{p-1} B_p}{A_1 B_p} = (-1)^p.$$

Si l'on considère le complexe linéaire spécial dont les rayons rencontrent une droite fixe l, on a la propriété :

Les sommets A_1, A_2, A_3, ..., A_p *d'un polygone gauche sont projetés d'un axe* l, *respectivement sur les diagonales opposées* $A_p A_2$, $A_1 A_3$, $A_2 A_4$, ..., $A_{p-1} A_1$ *en des points* B_1, B_2, B_3, ..., B_p *tels que*

$$\frac{A_p B_1}{A_2 B_1} \frac{A_1 B_2}{A_3 B_2} \frac{A_2 B_3}{A_4 B_3} \cdots \frac{A_{p-1} B_p}{A_1 B_p} = (-1)^p.$$

3. Les droites tangentes à une surface Σ ou rencontrant une courbe Δ, formant un complexe, on peut appliquer le théorème (n° 1) à des cônes circonscrits à la surface Σ ou perspectifs à la courbe (Δ).

4. Le complexe linéaire étant déterminé par cinq rayons, les cas de l'hexagone, du pentagone et du quadrilatère doivent retenir particulièrement l'attention. On peut alors énoncer les propositions réciproques :

a. Étant donné un hexagone gauche $A_1 A_2 \ldots A_6$ *dont les six côtés n'appartiennent pas à un complexe*

linéaire, on marque sur les diagonales A_6A_2, A_1A_3, A_2A_4, ..., A_5A_1 *respectivement les points* B_1, B_2, ..., B_6. *Si l'on a l'égalité*

$$\frac{A_6B_1}{A_2B_1}\,\frac{A_1B_2}{A_3B_2}\,\frac{A_2B_3}{A_4B_3}\,\frac{A_3B_4}{A_5B_4}\,\frac{A_4B_5}{A_6B_5}\,\frac{A_5B_6}{A_1B_6}=1,$$

les six rayons A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, A_5B_5, A_6B_6 *font partie d'un même complexe linéaire* (1).

En effet, les cinq droites A_1B_1, A_2B_2, ..., A_5B_5 ne peuvent appartenir à une même congruence bilinéaire, sinon le complexe linéaire passant par cette congruence et déterminé par le rayon A_1A_2 aurait pour rayons les côtés A_2A_3, A_3A_4, ..., A_6A_1 de l'hexagone, ce qui est contraire à l'hypothèse. Les cinq rayons A_1B_1, A_2B_2, ..., A_5B_5 déterminent donc un complexe linéaire; la droite A_6B_6 est un rayon de ce complexe d'après le théorème (n° 1).

b. Étant donné un pentagone gauche dont les cinq côtés A_1A_2, A_2A_3, ..., A_5A_1 *n'appartiennent pas à une congruence bilinéaire, on marque sur les diagonales* A_5A_2, A_1A_3, A_2A_4, A_3A_5, A_4A_1 *respectivement les points* B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. *Si l'on a l'égalité*

$$\frac{A_5B_1}{A_2B_1}\,\frac{A_1B_2}{A_3B_2}\,\frac{A_2B_3}{A_4B_3}\,\frac{A_3B_4}{A_5B_4}\,\frac{A_4B_5}{A_1B_5}=-1,$$

les cinq droites A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, A_5B_5 *sont des rayons d'une même congruence bilinéaire* (2).

---

(1) Ce théorème important, susceptible de nombreuses applications, est dû à M. J. Neuberg, qui l'a obtenu par voie analytique. (Voir *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1912, p. 194-202, Supplément à la livraison juillet, août, *Mathesis*, 1912.)

(2) J. Neuberg, *loc. cit.*

En effet, les quatre droites A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 ne peuvent appartenir à un même système réglé, sinon la congruence bilinéaire passant par ce système et déterminée par le rayon A_1A_2 aurait pour rayons les côtés A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1 du pentagone; ce qui est contraire à l'hypothèse. Les rayons A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 déterminent donc une congruence bilinéaire et tout complexe linéaire passant par cette congruence a pour rayon la droite A_5B_5 d'après le théorème (n° 1).

c. Si l'on prend respectivement sur les diagonales A_2A_4, A_1A_3 *d'un quadrilatère gauche* $A_1A_2A_3A_4$ *les couples de points* (B_1, B_3), (B_2, B_4) *tels que*

$$\frac{A_4B_1}{A_2B_1}\,\frac{A_1B_2}{A_3B_2}\,\frac{A_2B_3}{A_4B_3}\,\frac{A_3B_4}{A_1B_4}=1,$$

les droites A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, *appartiennent à un même système réglé.*

En effet, cette égalité peut se mettre sous la forme

$$(A_4A_2B_1B_3)(A_1A_3B_2B_4)=1$$

ou

$$(A_4A_2B_1B_3)=(B_4B_2A_1A_3),$$

par suite les droites A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 sont des rayons d'un même système réglé.

5. *Étant donnés une quadrique* Σ *et un polygone gauche* $A_1A_2\ldots A_p$, *les plans polaires des sommets* $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_p$ *rencontrent respectivement les diagonales opposées* A_pA_2, A_1A_3, A_2A_4, $\ldots$, $A_{p-1}A_1$ *en des points* $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_p$ *tels que l'on a l'égalité*

$$\frac{A_pB_1}{A_2B_1}\,\frac{A_1B_2}{A_3B_2}\,\frac{A_2B_3}{A_4B_3}\cdots\frac{A_{p-1}B_p}{A_1B_p}=1.$$

En effet, le théorème est vrai pour un triangle $A_1A_2A_3$;

car, relativement à la conique d'intersection de la quadrique Σ par le plan $A_1A_2A_3$, les polaires des sommets de ce triangle rencontrent les côtés opposés en trois points B_1, B_2, B_3 en ligne droite; on a donc

$$\frac{A_3B_1}{A_2B_1}\,\frac{A_1B_2}{A_3B_2}\,\frac{A_2B_3}{A_1B_3}=1.$$

On démontre comme au n° 1 que le théorème supposé vrai pour un polygone de $(p-1)$ sommets l'est nécessairement pour un polygone de p sommets.

6. *Étant donné un polygone gauche* $A_1A_2\ldots A_p$, *le nombre p de sommets pouvant prendre chacune des valeurs* 3, 4, 5, ..., 9, 10; *on marque respectivement sur les diagonales* A_pA_2, A_1A_3, A_2A_4, ..., $A_{p-1}A_1$ *les points* B_1, B_2, B_3, ..., B_p. *Si l'on a l'égalité*

$$\frac{A_pB_1}{A_2B_1}\,\frac{A_1B_2}{A_3B_2}\,\frac{A_2B_3}{A_4B_3}\cdots\frac{A_{p-1}B_p}{A_1B_p}=1,$$

toute quadrique qui divise harmoniquement $p-1$ des segments A_1B_1, A_2B_2, ..., A_pB_p *divise aussi harmoniquement le segment restant.*

En effet, il n'existe pas de quadrique divisant harmoniquement les dix côtés d'un décagone général : dans ce cas, les neuf couples de points conjugués (A_1, B_1) (A_2, B_2), ..., (A_9, B_9) définissent une seule quadrique Σ; sinon on pourrait leur adjoindre le couple de points conjugués (A_1, A_2) pour déterminer une quadrique; mais alors on aurait aussi les couples de points conjugués (A_2, A_3), (A_3, A_4), ..., (A_{10}, A_1), ce qui est contraire à l'hypothèse. La quadrique Σ est donc déterminée, et elle est conjuguée au couple de points (A_{10}, B_{10}) d'après le théorème (n° 5).

Si p est inférieur à 10, il existe une infinité de quadriques conjuguées à $(p-1)$ des couples de points

(A_1, B_1), (A_2, B_2), ..., (A_p, B_p), chacune d'elles est conjuguée au couple restant d'après le théorème (n° 5). Le théorème est donc démontré.

Cette généralisation d'un théorème de Hesse, relatif au quadrilatère polaire, est toute différente de l'élégante extension de ce théorème donnée par P. Serret et relative au tétraèdre coupé par une transversale [1].

7. *Étant donné un pentagone gauche* $A_1A_2 \ldots A_5$ *sur les diagonales* A_5A_2, A_1A_3, ..., A_4A_1, *on marque respectivement les points* B_1, B_2, ..., B_5. *Si l'on a l'égalité*

$$\frac{A_5B_1}{A_2B_1}\,\frac{A_1B_2}{A_3B_2}\cdots\frac{A_4B_5}{A_1B_5}=1,$$

les sphères décrites sur les segments A_1B_1, A_2B_2, ..., A_5B_5, *comme diamètres ont même centre radical.*

En effet, soient ω le centre radical des quatre sphères (A_1B_1), (A_2B_2), (A_3B_3), (A_4B_4); P_ω la puissance de ce point relativement à ces sphères; la sphère de centre ω et dont le carré du rayon est égal à P_ω divise harmoniquement les diamètres A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4. D'après le théorème (n° 6) elle divise harmoniquement le diamètre A_5B_5 de la sphère (A_5B_5); par suite P_ω est la puissance du point ω relativement à la sphère (A_5B_5).

Dans le cas du quadrilatère gauche $A_1A_2A_3A_4$, *les sphères* (A_1B_1), (A_2B_2), (A_3B_3), (A_4B_4) *ont même axe radical.*

8. *Des théorèmes* (n°s 4 et 5) *on déduit :*

Les plans polaires des sommets A_1, A_2, ..., A_6 *d'un hexagone général* (n° 4) *relativement à une quadrique* Σ *rencontrent les diagonales opposées*

---

[1] P. Serret, *Géométrie de direction*, p. 265.

A_1A_2, A_4A_5, ..., A_5A_1 *en des points* B_1, B_2, ..., B_6 *tels que les six rayons* A_1B_1, A_2B_2, ..., A_6B_6 *appartiennent à un même complexe linéaire.*

Les plans polaires des sommets d'un quadrilatère gauche $A_1A_2A_3A_4$ *rencontrent les diagonales opposées* A_2A_4, A_1A_3 *en des points* B_1, B_2, B_3, B_4 *tels que les quatre rayons* A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 *appartiennent à un même système réglé.*

9. Dans le cas où le polygone $A_1A_2\ldots A_p$ (n° 6) est inscrit dans la quadrique Σ, le conjugué harmonique B'_1 du point B_1 par rapport au couple A_pA_2 est conjugué à B_1 relativement à la quadrique Σ. La droite $A_1B'_1$ est dans le plan polaire du point B_1 ; ce plan passe par la conjuguée de la droite A_pB_1. La droite $A_1B'_1$ est donc la droite menée par le sommet A_1 s'appuyant sur la diagonale opposée A_pA_2 et sur sa conjuguée. En remarquant que les rapports de section $A_pB_1 : A_2B_1$, $A_pB'_1 : A_2B'_1$ sont égaux et de signes contraires, on a le théorème :

Si par chaque sommet d'un polygone gauche $A_1A_2\ldots A_p$ *inscrit dans une quadrique* Σ, *on mène la droite s'appuyant sur la diagonale opposée et sur sa conjuguée relativement à* Σ, *les* p *droites ainsi obtenues rencontrent respectivement les diagonales correspondantes* A_pA_2, A_1A_3, A_2A_4, ..., $A_{p-1}A_1$ *en des points* B'_1, B'_2, ..., B'_p *tels que*

$$\frac{A_pB'_1}{A_2B'_1}\,\frac{A_1B'_2}{A_3B'_2}\,\frac{A_2B'_3}{A_4B'_3}\cdots\frac{A_{p-1}B'_p}{A_1B'_p}=(-1)^p.$$

10. Des théorèmes (n°s 4 et 9) on déduit :

Si par sommet d'un hexagone général (n° 4) *ou d'un pentagone général* (n° 4) *ou d'un quadrilatère*

gauche inscrit dans une quadrique Σ on mène la droite s'appuyant sur la diagonale opposée et sur sa conjuguée relativement à la quadrique Σ, les six droites ainsi obtenues dans le cas de l'hexagone appartiennent à un même complexe linéaire; les cinq droites dans le cas du pentagone font partie d'une même congruence bilinéaire; les quatre droites dans le cas du quadrilatère gauche sont des rayons d'un même système réglé.

11. Dans un polygone d'un nombre impair de sommets $A_1 A_2 \ldots A_{2p+1}$, chaque sommet A_x est opposé à un côté du polygone. Ce côté joint les sommets consécutifs A_{x+p}, A_{x+p+1}, l'indice d'un sommet étant diminué de $2p+1$ s'il est supérieur à $2p+1$. Dans le polygone dont les sommets successifs sont : A_{p+2}, A_1, A_{p+1}, A_{2p+1}, A_p, A_{2p}, A_{p-1}, ..., A_2, la diagonale opposée à un sommet quelconque A_x est précisément le côté $A_{x+p} A_{x+p+1}$ opposé au sommet A_x dans le polygone $A_1 A_2 \ldots A_p$.

Il résulte de là que dans les propriétés qui font l'objet de la présente Note, si le nombre de sommets du polygone est impair, on peut substituer aux diagonales les côtés opposés aux mêmes sommets. Ainsi le théorème (n° 1) devient :

Les cônes d'un complexe d'ordre n, relatifs aux sommets A_1, A_2, ..., A_{2p+1} d'un polygone d'un nombre impair de sommets, déterminent sur les côtés opposés à ces sommets respectivement les ponctuelles

$$(B_1), (B_2), (B_3), \ldots, (B_{2p+1})$$

telles que l'on a l'égalité

$$(B_1)_{+2} + (B_3)_{+2} + \ldots + (B_{2p+1})_{+2} = (-1)^{\ldots}$$

[P¹3a]

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE DU THÉORÈME DE LIOUVILLE SUR LE GROUPE ISOGONAL DE TRANSFORMATIONS DANS L'ESPACE (¹);

PAR M. LE LIEUTENANT ANDRÉ LÉVÊQUE,
Élève à l'École Polytechnique.

THÉORÈME. — *Dans l'espace, le seul groupe de transformations ponctuelles qui conserve les angles est celui des similitudes et des inversions.*

Considérons en effet deux espaces E_1 et E_2 qui se correspondent point par point, et par suite ligne par ligne, surface par surface. Supposons que l'angle de deux lignes concourantes quelconques de E_1 soit égal à l'angle des deux lignes concourantes homologues de E_2.

Considérons dans E_1 le système triple orthogonal formé par un système de trois directions (P_1, P_2 et P_3) de plans rectangulaires. Il lui correspond dans E_2 un système triple orthogonal (S_1, S_2, S_3). Dans E_1, à la direction P_1 correspondent une infinité de directions P_2 et P_3; donc, dans E_2, à la famille S_1 de surfaces correspondent une infinité de familles S_2 et S_3. Comme les surfaces S_2 et S_3 coupent une surface S_1 quel-

(¹) Deux démonstrations, basées sur le théorème de Dupin, ont déjà été données en 1889 par M. E. Goursat (*Annales de l'École Normale; Mémoires sur les substitutions orthogonales et les divisions régulières de l'espace*) et en 1900 par M. G. Darboux (*Archiv der Mathematik und Physik*, 3e série, I; *Sur les transformations conformes de l'espace à trois dimensions*).

A. B.

conque suivant ses lignes de courbure, il en résulte que cette dernière admet une infinité de systèmes de lignes de courbure; tous ses points sont donc des ombilics. Les surfaces S_1 (et par suite S_2 et S_3) sont donc nécessairement des *plans* ou des *sphères*.

Premier cas. — Si toutes les surfaces S_1, S_2, S_3 sont des *plans*, et cela quel que soit le système P_1, P_2, P_3 considéré, alors les deux espaces E_1 et E_2 se correspondent plan par plan, et par suite droite par droite. Cette correspondance homographique, conservant les angles, est une *similitude* (directe ou inverse).

Deuxième cas. — Si les surfaces S_1, S_2, S_3 sont en général des *sphères*, examinons comment ces sphères seront distribuées dans l'espace E_2.

Une surface (S_1) quelconque est coupée par les deux familles S_2 et S_3 suivant deux familles C_1 et C'_1 de cercles orthogonaux, engendrées par l'intersection de (S_1) avec tous les plans passant par chacune des droites Δ_1 et Δ'_1 conjuguées par rapport à (S_1). Par exemple, les cercles C_1 sont tous les cercles de (S_1) passant par les deux points A_1 et B_1 (A_1 et B_1 étant réels ou imaginaires conjugués) d'intersection de (S_1) avec Δ_1. Ils correspondent dans E_2 à une série de parallèles du plan P_1 dans E_1. Donc ils ne doivent avoir aucun point commun à moins qu'ils ne se rencontrent sous des angles tous nuls; cette condition devant être réalisée pour C'_1 aussi bien que pour C_1 entraîne, pour Δ_1 et Δ'_1, la nécessité d'être deux tangentes rectangulaires en un même point O de (S_1) [1]. Alors, tous les cercles C_1

---

[1] On peut montrer autrement la nécessité pour tous les cercles C_1 et C'_1 de passer par un même point O : en effet, puisqu'à une droite quelconque D de P_1 correspond un cercle C de (S_1), le cercle C doit couper tous les cercles C_1 *sous le même angle* (de

et C'_1 passent par O ; il en est de même de toutes les sphères S_2 et S_3, et par suite des sphères S_1.

Il résulte de tout ceci qu'*à un plan quelconque de* E_1 *correspond une sphère de* E_2 *qui passe par un point fixe* O (cette sphère pouvant exceptionnellement être un plan). En effet, nous venons de le démontrer pour trois directions de plans rectangulaires. La démonstration précédente s'étend facilement au cas d'un plan quelconque de E_1, au moyen de la remarque suivante : à un plan qui passe par l'intersection de deux autres dans E_1 correspond dans E_2 une sphère qui passe par l'intersection de deux autres. Alors, un plan P perpendiculaire à P_1, passant par l'intersection de deux plans P_2 et P_3, correspond à une sphère qui passe par O ; de même, un plan H, passant par l'intersection de P et d'un plan P_1 quelconque, correspond à une sphère qui passe en O : or le plan H est arbitraire.

La démonstration s'achève dès lors sans aucune difficulté : dans l'espace E_2, faisons une inversion quelconque de pôle O : nous obtenons un nouvel espace, E'_2, qui correspond point par point à l'espace E_1, avec conservation des angles ; mais, les sphères passant par O étant transformées en plans, il en résulte qu'à un plan quelconque de E_1 correspond un plan de E'_2. La correspondance entre E_1 et E'_2 est la même que dans le premier cas ; c'est donc une *similitude*, qui peut être en particulier une égalité directe ou inverse.

C. Q. F. D.

---

même pour tous les cercles C'_1), généralement différent d'un droit ; or il existe toujours un cercle C_1 ou un cercle C'_1 tangent au cercle C, à moins que ce cercle C ne passe à la fois par les deux couples de points communs aux cercles C_1 et aux cercles C'_1 ; ceci n'est possible que si ces points communs sont tous les quatre confondus en un point O ; alors tout cercle de (S_1) passant par O est un cercle C, et réciproquement.

CHRONIQUE.

Doctorat ès sciences mathématiques.

SORBONNE (soutenances de 1920).

M. *B. Globa-Mikhaïlenko.* — 1° Contribution à l'étude des formes d'une masse fluide en équilibre.

2° Méthode de Ritz pour l'équilibre, sous l'action d'une charge verticale donnée, d'une lame rectangulaire horizontale encastrée sur tout son contour.

M. *M. Janet.* — 1° Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles.

2° Sur les congruences de droites.

M. *A. Cornu-Thénard.* — 1° Étude expérimentale sur les essais au choc de barres entaillées.

2° Méthodes de dosage des gaz dans les aciers.

Nominations et élections.

M. *L.-E. Brouwer*, professeur à l'Université d'Amsterdam, a été nommé professeur à l'Université de Berlin, en remplacement de M. C. Carathéodory, nommé professeur à l'Université d'Athènes.

M. *Pierre Boutroux*, professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers, est nommé professeur d'histoire générale des sciences au Collège de France.

M. *Jules Drach* est nommé professeur de Mathématiques générales à la Sorbonne, en remplacement de M. E. Vessiot, appelé à d'autres fonctions.

M. *Eugène Fabry*, professeur de Mathématiques à la Faculté des Sciences de Montpellier, est nommé, sur sa demande, professeur de Calcul différentiel et intégral à la Faculté des Sciences de Marseille, en remplacement de M. Sauvage, décédé.

M. *L. Torres Quevedo*, de Madrid, est élu Correspondant de l'Académie des Sciences dans la Section de Mécanique, en remplacement de M. L. Boulvin, décédé.

Décès.

M. *P.-G. Staeckel*, professeur à l'Université d'Heidelberg, est mort le 12 décembre 1919 à l'âge de 57 ans.

M. *Srinivasa Ramajuan*, membre de la Société royale de Londres, est mort le 26 avril 1920, à l'âge de 31 ans. Ce brillant mathématicien indien, formé à Cambridge, disciple de G.-H. Hardy, a publié une quinzaine de Mémoires sur l'Analyse algébrique et la Théorie des nombres.

Agrégation des Sciences mathématiques (1920). — Ont été nommés agrégés :

Au concours spécial : MM. Ninin, Jacques, Rambaud, Saporte, Balman, Darves Bornoz, Jardillier, Duchemin, Desbats, Bazerque, Labrunie, Degeorges, Ellies, Francillon, Delcourt, Chanier, Durupt, Genin, de Sarrau, Belloc, Bernard, Benoit-Gonin, Cazes, Mirante, Péré, Dubois.

Hors rang : MM. Ferrien, Garry Bobo, Pasqualini.

Au concours normal : Mlle Chaumont, M. Rousseau, Mlle Parize, M. Someyre.

Parmi les anciens admissibles du concours spécial : MM. Deperrois, Meyer, Estève, Ranson, Costabel, Davy, Mirabel, Perrier.

Parmi les anciens admissibles du concours normal : MM. Angeloz-Pessey, Perfetti, Bayle, Quémissen.

[O'6k]

SURFACES DE TRANSLATION APPLICABLES L'UNE SUR L'AUTRE

(*Fin*);

PAR M. BERTRAND GAMBIER,
Professeur à la Faculté des Sciences de Rennes.

8. Nous avons épuisé complètement le cas où les trois relations linéaires et homogènes considérées *a priori* sont résolubles par rapport à A'_1, A'_2, A'_3. Je dois maintenant supposer que ces trois relations considérées comme linéaires et non homogènes en A'_1, A'_2, A'_3 ne sont pas résolubles; la théorie des équations linéaires donne immédiatement le moyen d'en déduire une équation au moins ne contenant plus A'_1, A'_2, A'_3. On doit supposer aussi que les équations linéaires considérées en a'_1, a'_2, a'_3, A'_1, A'_2, A'_3 ne sont pas non plus résolubles en a'_1, a'_2, a'_3, sinon en intervertissant le rôle de S et S_1 nous retomberions sur l'un des cas déjà traités [types (II) et (III)]; par conséquent la théorie des équations linéaires permet aussi d'obtenir comme conséquence des trois équations étudiées une équation au moins ne contenant plus a'_1, a'_2, a'_3. Le système de ces trois équations a pris déjà la première forme réduite suivante, où aucune des trois équations n'est une identité :

$$(63)\quad \left\{\begin{aligned} &la'_1 + ma'_2 + na'_3 = 0,\\ &LA'_1 + MA'_2 + NA'_3 = 0,\\ &pa'_1 + qa'_2 + ra'_3 + PA'_1 + QA'_2 + RA'_3 = 0; \end{aligned}\right.$$

la première équation exprime que le point a'_1, a'_2, a'_3 reste dans un plan passant par l'origine, nous pouvons

déplacer le système (a), (b), de sorte que ce plan devienne le plan xOy, cette équation deviendra donc $a'_3 = 0$; de même la seconde par un déplacement de (A), (B) deviendra $A'_3 = 0$; la troisième en tenant compte des deux premières pourra s'écrire

$$pa'_1 + qa'_2 + PA'_1 + QA'_2 = 0.$$

Si p et q sont nuls tous deux, il n'y a rien à faire de plus au système (a), (b); si p et q ne sont pas nuls tous deux, on fait pivoter le système (a), (b) sur la sphère autour de Oz de sorte que le plan d'équation $px + qy = 0$ considéré comme invariablement lié à l'ensemble (a), (b) se confonde avec le plan xOz, autrement dit on pourra supposer $q = 0$; si P et Q sont nuls tous deux, il n'y a rien à faire de plus, sinon je peux par le même procédé supposer $Q = 0$; de toute façon la troisième équation a pris la forme

$$pa'_1 + PA'_1 = 0.$$

où p et P ne sont pas nuls tous deux; supposons $P \neq 0$; j'ai donc le système réduit

$$(64) \qquad a'_3 = 0, \qquad A'_3 = 0, \qquad A'_1 = \mu a'_1,$$

et le raisonnement du paragraphe 2 montre que la relation (2) donne

$$(65) \qquad B'_2 = 0, \qquad b'_2 = 0, \qquad b'_1 = \mu B'_1,$$

les coniques (a) et (b) sont deux grands cercles rectangulaires de la sphère; les coniques (A) et (B) aussi. J'aurais pu comme dans les trois types (I), (II) et (III) faire coïncider (A) avec (b) et (B) avec (a); j'ai préféré, ce qui n'a aucune importance, faire coïncider (A) avec (a), (B) avec (b); le point a étant donné, on

obtient A en multipliant par μ l'abscisse de a; le point b étant donné on obtient B en multipliant l'abscisse de b par $\frac{1}{\mu}$. On peut supposer $\mu > 0$; or si μ est inférieur à 1, $\frac{1}{\mu}$ est supérieur à 1 et inversement, donc si μ est plus petit que l'unité pour fixer les idées, tout point a ou B a un homologue réel, mais il n'en est plus de même pour tout point A ou b. Cela nous montre, conformément à ce qui a déjà été vu, que certains points de S risquent de n'avoir pas de correspondant réel sur S_1 et inversement.

J'ai supposé dans ce raisonnement $\mu \neq 0$; si $\mu = 0$ on voit immédiatement que $b'_1 = 0$, $b'_2 = 0$ donnent $b'_3 = 1$, les courbes Γ sont des droites parallèles à Oz, et $a'_3 = 0$ montre que les courbes C sont planes dans un plan perpendiculaire à Oz : donc S est un cylindre, S_1 aussi et l'on retombe purement et simplement sur le type (III) où l'on ferait $h = 0$: on a enroulé le cylindre S de sorte que les génératrices de S s'enroulent sur les sections droites de S_1. Inutile de revenir sur ce cas.

Donc, puisque $\mu \neq 0$, je pourrai manifestement écrire

$$(\mathrm{IV})\quad \left\{\begin{array}{ll} (\mathrm{S}) & \left\{\begin{array}{l} x = \int \cos\theta\, \mathcal{F}(\theta)\, d\theta + \int \cos\theta_1\, \mathcal{F}_1(\theta_1)\, d\theta_1, \\ y = \int \sin\theta\, \mathcal{F}(\theta)\, d\theta, \\ z = \int \sin\theta_1\, \mathcal{F}_1(\theta_1)\, d\theta_1; \end{array}\right. \\ (\mathrm{S}_1) & \left\{\begin{array}{l} \mathrm{X} = \mu \int \cos\theta\, \mathcal{F}(\theta)\, d\theta + \frac{1}{\mu} \int \cos\theta_1\, \mathcal{F}_1(\theta_1)\, d\theta_1, \\ \mathrm{Y} = \int \sqrt{1 - \mu^2 \cos^2\theta}\, \mathcal{F}(\theta)\, d\theta, \\ \mathrm{Z} = \int \sqrt{1 - \frac{\cos^2\theta_1}{\mu^2}}\, \mathcal{F}_1(\theta_1)\, d\theta_1; \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$ds^2 = \mathcal{F}^2(\theta)\, d\theta^2 + \mathcal{F}_1^2(\theta_1)\, d\theta_1^2 + 2\cos\theta\cos\theta_1\, \mathcal{F}(\theta)\, \mathcal{F}(\theta_1)\, d\theta\, d\theta_1.$$

Il y a beaucoup de propriétés intéressantes à signaler : la *surface* S *est engendrée par deux courbes planes arbitraires dont les plans sont rectangulaires.* Cette surface de translation étant ainsi définie, on peut prendre μ arbitrairement : *on obtient donc une infinité de surfaces à un paramètre correspondant à* S; toutes ces surfaces S_1 sont, elles aussi, engendrées par deux courbes planes dont les plans sont rectangulaires.

Supposons $\mu < 1$, sinon j'échangerais le nom des courbes θ et θ_1; alors la surface S_1 n'est définie que pour les valeurs de θ_1 telles que $\cos^2\theta_1 < \mu^2$; autrement dit V étant l'angle aigu tel que $\cos V = \mu$, $\sin V = \sqrt{1-\mu^2}$, on doit avoir

$$V < \theta_1 < \pi - V$$

ou

$$V < -\theta_1 < \pi - V.$$

Donc tous les points de la courbe Γ qui ne satisfont pas à cette inégalité n'ont pas de correspondant réel sur S_1; or puisque μ est variable, on voit que si μ tend vers zéro il y a une portion de plus en plus faible de Γ qui satisfera à cette condition et comme dans le cas précédent la valeur $\theta_1 = V$ donnera sur S_1 une courbe plane de rebroussement située dans un certain plan parallèle à xO_1, qui est plan de symétrie pour S_1. De même si μ varie d'une façon continue de 1 à $+\infty$, ce sera cette fois une portion de plus en plus faible de C qui sera à considérer dans l'application par points réels. Cela fait un exemple curieux de déformation continue.

J'opérerai comme j'ai fait plus haut pour avoir un exemple concret algébrique : il suffit de prendre $\mathfrak{F}(\theta) = 3\cos\theta\sin\theta$ et l'on obtient, à quelques changements de signe près, en appelant a une constante

numérique :

$$(66)\qquad \begin{cases} x = \cos^3\theta + a\cos^3\theta_1, \\ y = \sin^3\theta, \\ z = \qquad\quad + a\sin^3\theta_1; \end{cases}$$

$$(67)\qquad \begin{cases} X = \mu\cos^3\theta + \dfrac{a}{\mu}\cos^3\theta_1, \\ Y = \dfrac{1}{\mu^2}(1-\mu^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}, \\ Z = a\mu^2\left(1-\dfrac{\cos^2\theta_1}{\mu^2}\right)^{\frac{3}{2}}; \end{cases}$$

$$(68)\qquad ds^2 = 9\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta^2 + 9a^2\sin^2\theta_1\cos^2\theta_1\,d\theta_1^2 + 18a\cos^2\theta\cos^2\theta_1\sin\theta\sin\theta_1\,d\theta\,d\theta_1.$$

Chacune des deux surfaces (66) ou (67) est manifestement unicursale; la première est engendrée par des hypocycloïdes à quatre rebroussements. La seconde aussi : car si je pose $\mu\cos\theta = t$, la courbe génératrice

$$X = \mu\cos^3\theta, \qquad Y = \frac{1}{\mu^2}(1-\mu^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}$$

devient

$$X = \frac{t^3}{\mu^2}, \qquad Y = \frac{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}{\mu^2},$$

ce qui rend la proposition évidente. Sur la première surface j'ai dans les deux séries des hypocycloïdes à quatre rebroussements pour lesquelles le cercle fixe a pour rayon l'unité ou a; dans la seconde surface les courbes $\theta_1 =$ const. correspondent à des hypocycloïdes relatives à un cercle fixe de rayon $\frac{1}{\mu^2}$ et les courbes θ à un cercle fixe de rayon $a\mu^2$.

J'ai des remarques analogues à celles qui ont été faites précédemment : pour la réalité, il est évident que $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{F}_1$ doivent être réelles, ainsi que μ. Si $\mathfrak{F}_1(\theta)$ est choisi égal identiquement à $+\mathfrak{F}(\theta)$ ou $-\mathfrak{F}(\theta)$, j'ai une surface auto-applicable, avec déformation, pour chaque valeur de μ, sauf $\mu = 1$. Pour $\mathfrak{F}_1(\theta) \equiv \mathfrak{F}(\theta)$ et $\mu = 1$,

S est simplement douée de symétrie par échange de θ avec θ_1.

Les surfaces que nous avons trouvées ici donnent une représentation de l'élément linéaire

$$ds^2 = U^2\,du^2 + V^2\,dv^2 + 2\,U_1V_1\,du\,dv,$$

où U et U_1 sont fonctions de u et V et V_1 de v. En effet, il suffira de calculer θ et $\mathcal{F}$ par les formules

$$\cos\theta = \frac{U_1}{U} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{F}(\theta)\,d\theta = U\,du$$

dont la première donne θ directement et la seconde, une fois θ calculé, donne $\mathcal{F}$ par une simple différentiation; on calcule de même θ_1 et $\mathcal{F}_1$ et les formules (IV) donnent par quatre quadratures, une fois μ fixé, une infinité de surfaces admettant cet élément linéaire. L'introduction de μ provient en réalité de ce que l'on peut remplacer U_1 par μU et V_1 par $\frac{V}{\mu}$, où μ est la constante qui figure aux formules (IV). On peut remarquer que les trajectoires orthogonales des courbes $\theta =$ const. ou $\theta_1 =$ const. s'obtiennent par l'une ou l'autre de deux opérations dont chacune exige deux quadratures. En effet on peut écrire pour les surfaces (IV)

$$(69) \qquad \begin{aligned} ds^2 = {} & [\mathcal{F}(\theta)\,d\theta + \cos\theta\cos\theta_1\,\mathcal{F}_1(\theta_1)\,d\theta_1]^2 \\ & + \mathcal{F}_1^2(\theta_1)\,d\theta_1^2\,[1 - \cos^2\theta\cos^2\theta_1]. \end{aligned}$$

Si donc on considère le faisceau des courbes

$$(70) \qquad \frac{\mathcal{F}(\theta)\,d\theta}{\cos\theta} + \cos\theta_1\,\mathcal{F}_1(\theta_1)\,d\theta_1 = 0,$$

il représente précisément les trajectoires orthogonales des courbes $\theta_1 =$ const.; l'une des quadratures à faire $\int \cos\theta_1\,\mathcal{F}_1(\theta_1)\,d\theta_1$ est précisément l'une de celles qui ont servi à déterminer la surface; si donc la surface est

connue, il n'y a que la quadrature $\int \frac{\mathcal{F}(\theta)\,d\theta}{\cos\theta}$ à calculer; de même les trajectoires orthogonales des courbes $\theta =$ const. s'obtiennent par l'équation

$$(71) \qquad \mathcal{F}(\theta)\,d\theta\cos\theta + \frac{\mathcal{F}_1(\theta_1)\,d\theta_1}{\cos\theta_1} = 0.$$

Sur les surfaces (66) et (67), par exemple, on a ainsi les réseaux orthogonaux

$$(72) \qquad \theta_1 = C, \qquad 3\cos\theta + \alpha\cos^3\theta_1 = C';$$

$$(73) \qquad \theta = D, \qquad 3\alpha\cos\theta_1 + \cos^3\theta = D'.$$

En songeant que les courbes $\theta_1 =$ const. sont les courbes de niveau de la surface, nous savons qu'il suffit d'avoir les trajectoires orthogonales des projections horizontales des courbes de niveau; ces projections dérivent de l'une d'elles par un glissement le long de l'axe des x, ce qui explique qu'il suffise d'une quadrature.

Il est facile enfin d'obtenir sans signes de quadratures les équations des surfaces S et S_1 du type (IV). Il suffit que les trois intégrales

$$\xi = \int \cos\theta\,\mathcal{F}(\theta)\,d\theta, \qquad \eta = \int \sin\theta\,\mathcal{F}(\theta)\,d\theta,$$

$$\zeta = \int \sqrt{1-\mu^2\cos^2\theta}\,\mathcal{F}(\theta)\,d\theta$$

soient calculées. Or, si l'on considère le point x, y, z défini par les formules

$$(74) \qquad \frac{x}{\cos\theta} = \frac{y}{\sin\theta} = \frac{z}{\sqrt{1-\mu^2\cos^2\theta}},$$

il décrit une certaine courbe gauche qui est sur un cône du second degré ayant son sommet à l'origine; donc le point ξ, μ, ζ décrit une courbe dont le cône directeur

des tangentes est du second degré et j'ai expliqué comment résoudre ce problème. Comme on a évidemment

$$(1-\mu^2)\cos^2\theta + \sin^2\theta - (1-\mu^2\cos^2\theta) = 0,$$

l'équation du cône est

$$(1-\mu^2)x^2 + y^2 - z^2 = 0;$$

si donc μ^2 est plus petit que l'unité j'écrirai, en me servant des formules (40) où je remplace x par ξ, y par ζ, z par η, L par $\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}}$, M par -1, N par 1 :

$$(75)\quad \left\{\begin{aligned}
\xi &= \frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}}\left[\frac{1-u^2}{2}f''(u) + uf'(u) - f(u)\right] \\
&= \int \cos\theta\, \mathcal{F}(\theta)\, d\theta, \\
\eta &= \qquad\qquad u \qquad f''(u) \qquad f'(u) \\
&= \int \sin\theta\, \mathcal{F}(\theta)\, d\theta, \\
\zeta &= \qquad\qquad \frac{1+u^2}{2}f''(u) - uf'(u) + f(u) \\
&= \int \sqrt{1-\mu^2\cos^2\theta}\, \mathcal{F}(\theta)\, d\theta.
\end{aligned}\right.$$

Il faut de même calculer les trois intégrales

$$\xi_1 = \int \cos\theta_1\, \mathcal{F}_1(\theta_1)\, d\theta_1, \qquad \eta_1 = \int \sin\theta_1\, \mathcal{F}_1(\theta_1)\, d\theta_1,$$
$$\zeta_1 = \int \sqrt{1-\frac{\cos^2\theta_1}{\mu^2}}\, \mathcal{F}_1(\theta_1)\, d\theta_1.$$

On est de même ramené au cône

$$\left(1-\frac{1}{\mu^2}\right)x^2 + y^2 - z^2 = 0;$$

comme cette fois $\frac{1}{\mu^2} > 1$ je prends

$$L = \frac{\mu^2}{1-\mu^2}, \qquad M = -1, \qquad N = 1,$$

et je recopie les formules (40) :

$$(76)\quad \begin{cases} \xi_1 = \dfrac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}\left[\dfrac{1-u_1^2}{2} f_1''(u_1) + u_1 f_1'(u_1) + f_1(u_1)\right] \\ \quad = \displaystyle\int \cos\theta_1\, \mathcal{F}_1(\theta_1)\, d\theta_1, \\ \eta_1 = \dfrac{1+u_1^2}{2} f_1''(u_1) - u_1 f_1'(u_1) + f_1(u_1) \\ \quad = \displaystyle\int \sin\theta_1\, \mathcal{F}_1(\theta_1)\, d\theta_1, \\ \zeta_1 = u_1 \quad f_1''(u_1) - \quad f_1'(u_1) \\ \quad = \displaystyle\int \sqrt{1 - \frac{\cos^2\theta_1}{\mu^2}}\, \mathcal{F}_1(\theta_1)\, d\theta_1. \end{cases}$$

J'écrirai donc, si μ est inférieur à 1, $\mu = \sin\varphi$:

$$(\mathrm{IV}')\quad \begin{cases} (\mathrm{S}) \begin{cases} x = \dfrac{1}{\cos\varphi}\left[\dfrac{1-u^2}{2} f''(u) - u\, f'(u) - f(u)\right] \\ \qquad + \tang\varphi\left[\dfrac{1-u_1^2}{2} f_1''(u_1) + u_1 f_1'(u_1) - f_1(u_1)\right], \\ y = u \quad f''(u) - \quad f'(u), \\ z = \dfrac{1+u_1^2}{2} f_1''(u_1) - u_1 f_1'(u_1) + f_1(u_1); \end{cases} \\ (\mathrm{S}_1) \begin{cases} \mathrm{X} = \tang\varphi\left[\dfrac{1-u^2}{2} f''(u) + u\, f'(u) - f(u)\right] \\ \qquad + \dfrac{1}{\cos\varphi}\left[\dfrac{1-u_1^2}{2} f_1''(u_1) + u_1 f_1'(u_1) - f_1(u_1)\right], \\ \mathrm{Y} = \dfrac{1+u^2}{2} f''(u) - u\, f'(u) + f(u), \\ \mathrm{Z} = u_1 \quad f_1''(u_1) - \quad f_1'(u_1); \end{cases} \\ ds^2 = \left[\dfrac{(1-u^2)^2}{4\cos^2\varphi} + u^2\right] f'''^2(u)\, du^2 + \left[\dfrac{(1-u_1^2)^2}{4\cos^2\varphi} + u_1^2\right] f_1'''^2(u_1)\, du_1^2 \\ \qquad + \dfrac{\sin\varphi}{2\cos^2\varphi}(1-u^2)(1-u_1^2) f'''(u) f_1'''(u_1)\, du\, du_1, \end{cases}$$

Il n'est pas sans intérêt de remarquer que ces for-

mules ne sont autres que les formules (II′) ou (II″) où l'on remplace ψ par zéro. Dans les formules (IV), si l'on suppose μ supérieur à 1, il n'y à qu'à échanger S et S_1; ou encore à échanger θ et θ_1 pour qu'en même temps μ soit remplacé par $\frac{1}{\mu}$; de sorte que les formules (IV′) peuvent suffire dans tous les cas : d'ailleurs, elles rétablissent la symétrie entre S et S_1.

Il s'agit de bien comprendre le sens des formules (IV′); s'il ne s'était agi que d'obtenir *une seule surface* S, il n'y aurait eu rien à écrire que les équations générales de deux courbes planes l'une du plan xOy, l'autre du plan xOz; mais alors pour obtenir les surfaces correspondantes S_1, il faut deux quadratures dépendant du paramètre μ, et alors ces quadratures donnent *toutes les surfaces* S_1 *correspondant à* S. Si S est algébrique, en général ces surfaces S_1 seront transcendantes, sauf la seule surface S.

Les formules (IV′) *ne donnent qu'un couple de deux surfaces* S *et* S_1; elles ne se prêtent donc pas à déterminer toutes les surfaces S_1 correspondant à une même surface S, car si φ varie les deux surfaces du couple S et S_1 varient toutes deux. Mais elles prouvent que dans une famille de surfaces correspondant à une surface donnée il peut y en avoir d'algébriques; si f et f_1 sont deux fonctions algébriques, S et S_1 sont algébriques en même temps, mais cela ne fait que deux surfaces algébriques dans la famille.

Nous avons trouvé un cas particulier [formules (66) et (67)] où toutes les surfaces de la famille sont algébriques. Rendons-nous compte de quelques conditions nécessaires pour que toutes les surfaces soient algébriques : la courbe

$$x = \int \cos\theta\, \mathcal{F}(\theta)\, d\theta, \qquad y = \int \sin\theta\, \mathcal{F}(\theta)\, d\theta$$

doit être algébrique; soit s l'arc de cette courbe, on a

$$ds = \mathcal{F}(\theta)\, d\theta = \sqrt{1 + y'^2}\, dx,$$

y' désignant la dérivée de y par rapport à x. La courbe

$$x_1 = \mu \int \cos\theta\, \mathcal{F}(\theta)\, d\theta, \qquad y_1 = \int \sqrt{1 - \mu^2 \cos^2\theta}\, \mathcal{F}(\theta)\, d\theta$$

sera elle aussi algébrique; or en remplaçant $\operatorname{tang}\theta$ par y', on a aisément

$$\sqrt{1 - \mu^2 \cos^2\theta}\, \mathcal{F}(\theta)\, d\theta = \sqrt{1 + y'^2 - \mu^2}\, dx.$$

L'intégrale $\int \sqrt{1 + y'^2 - \mu^2}\, dx$ doit être algébrique quel que soit μ, donc pour $\mu = 0$ on trouve que l'arc de la courbe (x, y) est rectifiable; autrement dit, la courbe (x, y) est la développée d'une courbe algébrique; la seconde courbe plane qui engendre S sera elle aussi développée d'une courbe algébrique. Sur chaque surface S_1 les deux courbes planes mises en évidence jouissent de la même propriété. Le procédé employé précédemment relativement au type (I), formules (30), (31) et (32) conduit à une infinité de solutions particulières obtenues en prenant

$$\mathcal{F}(\theta) = \cos\theta \sin\theta\, P(\cos^2\theta),$$

où P est un polynome entier arbitraire.

9. Les surfaces que j'ai étudiées ici donnent une confirmation intéressante de diverses propriétés générales que j'ai développées dans un Mémoire qui sera publié au *Bulletin des Sciences mathématiques :*

Si une surface S_1 s'applique sur une surface S sans recouvrir S complètement, il est nécessaire que S_1 possède une ligne de rebroussement et que S_1 puisse s'ap-

pliquer sur elle-même en se déformant de façon que l'arête de rebroussement reste inaltérée et que les deux nappes de S_1 qui viennent se toucher le long de cette arête s'échangent l'une en l'autre après l'application. J'ai fourni de nombreux exemples de cette particularité : *voir* en particulier les surfaces (59) et (60); dans l'application de S_1 sur S, la frontière des régions de S non recouvertes est la transformée de l'arête de rebroussement et, du côté de cette frontière où S est recouverte, elle est recouverte deux fois.

Si une surface S possède une arête de rebroussement sans être auto-applicable; ou même si S est auto-applicable, mais alors avec déformation de l'arête de rebroussement, toute surface S_1 applicable sur S admet comme ligne de rebroussement la transformée de l'arête de S. Ici, c'est vérifié immédiatement : un zéro de $\mathcal{F}(t)$ ou $\mathcal{F}_1(t_1)$ donne une arête de rebroussement qui se conserve en passant de S à S_1. Les surfaces (41), (42) offrent un exemple de cette particularité.

[H2b]

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES QUI ADMETTENT DES INTÉGRALES SINGULIÈRES;

PAR M. E. GOURSAT.

Quand un problème d'Analyse ou de Géométrie conduit à une équation différentielle, il arrive quelquefois que l'intégrale générale de cette équation ne fournit que des solutions étrangères à ce problème, tandis que la véritable solution correspond à des inté-

grales singulières. On connaît déjà plusieurs exemples classiques de ce fait. Je me propose d'indiquer un autre exemple assez général, qui se rattache à la théorie du *Problème de Monge*.

1. Étant donnée une relation de la forme

$$(1) \qquad F(x, y, z, dx, dy, dz) = 0,$$

où F est une fonction homogène, *non linéaire*, en dx, dy, dz, appelons, pour abréger, *courbe intégrale* toute courbe Γ dont les éléments linéaires (x, y, z, dx, dy, dz) vérifient identiquement la relation (1). Ces courbes dépendent d'une fonction arbitraire d'une variable, car on peut se donner arbitrairement y en fonction de x, ou (ce qui revient au même) se donner x et y en fonction d'un paramètre auxiliaire, et la troisième coordonnée z est déterminée par une équation différentielle du premier ordre. Géométriquement, l'équation (1) exprime que les tangentes aux diverses courbes intégrales qui passent par un point $M(x, y, z)$ de l'espace sont les génératrices du cône (T) de sommet M qui a pour équation

$$F(x, y, z, X - x, Y - y, Z - z) = 0,$$

X, Y, Z désignant les coordonnées courantes. Sur toute surface S il existe, en général, une infinité de courbes intégrales de l'équation (1), qui sont déterminées par une équation différentielle du premier ordre. Il est clair, en effet, que les tangentes aux courbes intégrales situées sur S qui passent par un point M de cette surface sont les génératrices du cône (T) de sommet M qui sont dans le plan tangent à S en ce point. Les coordonnées x, y, z d'un point de S étant exprimées au moyen de deux paramètres u, v, les diffé-

rentielles dx, dy, dz dépendent de u, v, du, dv, et, en remplaçant x, y, z, dx, dy, dz par leurs expressions dans l'équation (1), on arrive à une équation différentielle du premier ordre qui détermine les courbes cherchées.

Mais on peut traiter la question d'une autre façon, quand on connaît les expressions générales des coordonnées d'un point d'une courbe intégrale. Ce problème préliminaire, appelé *problème de Monge*, se ramène, comme il est bien connu, à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre (E), que l'on obtient en écrivant que le plan tangent

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$$

en un point (x, y, z) d'une surface intégrale est tangent aussi au cône (T) ayant son sommet en ce point. Soit

$$V(x, y, z, \alpha, \beta) = 0 \tag{2}$$

une intégrale complète de cette équation, α et β étant deux constantes arbitraires. Abstraction faite des courbes caractéristiques, toute courbe intégrale de l'équation (1) est l'arête de rebroussement de la surface enveloppe d'une famille d'intégrales complètes obtenue en établissant entre α et β une relation de forme arbitraire, $\beta = \varphi(\alpha)$. On obtiendra donc les équations générales de ces courbes en résolvant par rapport à x, y, z les trois équations

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &V[x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha)] = 0,\\ &\frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \varphi(\alpha)}\varphi'(\alpha) = 0,\\ &\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} + 2\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha\, \partial \varphi(\alpha)}\varphi'(\alpha) + \frac{\partial^2 V}{[\partial \varphi(\alpha)]^2}[\varphi'(\alpha)]^2 + \frac{\partial V}{\partial \alpha}\varphi''(\alpha) = 0. \end{aligned}\right.$$

En résolvant ces équations par rapport à x, y, z, on a les équations générales des courbes intégrales proprement dites

$$(4)\qquad \begin{cases} x = f_1[\alpha, \varphi(\alpha), \varphi'(\alpha), \varphi''(\alpha)], \\ y = f_2[\alpha, \varphi(\alpha), \varphi'(\alpha), \varphi''(\alpha)], \\ z = f_3[\alpha, \varphi(\alpha), \varphi'(\alpha), \varphi''(\alpha)], \end{cases}$$

f_1, f_2, f_3 étant des fonctions déterminées de leurs arguments, $\varphi(\alpha)$ une fonction arbitraire de α, φ' et φ'' ses dérivées.

Pour avoir toutes les courbes qui satisfont à la relation (1), il faut ajouter aux courbes précédentes les courbes caractéristiques, représentées par les équations

$$V(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \beta}\gamma = 0,$$

qui dépendent de trois constantes arbitraires α, β, γ.

Ces points étant rappelés, proposons-nous de trouver les courbes intégrales Γ de l'équation (1) situées sur une surface S représentée par l'équation

$$(5)\qquad \Phi(x, y, z) = 0.$$

On peut toujours reconnaître, par des calculs d'élimination, si cette surface renferme des courbes caractéristiques; nous laisserons de côté ce cas particulier. Pour qu'une courbe Γ représentée par les équations (4) soit située sur la surface S, la fonction inconnue $\varphi(\alpha)$ doit vérifier la relation

$$(6)\qquad \Phi(f_1, f_2, f_3) = R[\alpha, \varphi(\alpha), \varphi'(\alpha), \varphi''(\alpha)] = 0,$$

et cette condition est suffisante. On est ainsi conduit à une équation différentielle du *second ordre*, tandis que nous savons *a priori* que les courbes cherchées ne dépendent que d'une constante arbitraire. Nous expli-

querons ce résultat d'apparence paradoxale, en montrant que l'intégrale générale de l'équation (6) ne donne pas les véritables solutions du problème, qui sont fournies par les intégrales singulières de cette équation.

2. La relation

$$V(C_1, C_2, C_3, \alpha, \beta) = 0 \tag{7}$$

définit une fonction $\beta = f(\alpha, C_1, C_2, C_3)$ de la variable α, dépendant de trois constantes arbitraires C_1, C_2, C_3; toutes ces fonctions sont des intégrales d'une équation différentielle du troisième ordre

$$f'''(\alpha) + H[\alpha, f(\alpha), f'(\alpha), f''(\alpha)] = 0, \tag{8}$$

que l'on obtiendrait en éliminant C_1, C_2, C_3 entre les quatre équations

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} V[C_1, C_2, C_3, \alpha, f(\alpha) = 0, \qquad \dfrac{\partial V}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial V}{\partial f(\alpha)} f'(\alpha) = 0, \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} + 2\dfrac{\partial^2 V}{\partial \alpha\, \partial f(\alpha)} f'(\alpha) + \dfrac{\partial^2 V}{[\partial f(\alpha)]^2}[f'(\alpha)]^2 + \dfrac{\partial V}{\partial f(\alpha)} f''(\alpha) = 0, \\ \dfrac{\partial^3 V}{\partial \alpha^3} + \ldots + \dfrac{\partial V}{\partial f(\alpha)} f'''(\alpha) = 0, \end{array}\right.$$

dont les trois premières sont identiques aux équations (3), où l'on aurait remplacé x, y, z par C_1, C_2, C_3 respectivement et φ par f. Si donc on remplace, dans les formules (4), φ par une intégrale de l'équation (8) correspondant aux valeurs C_1, C_2, C_3 des constantes arbitraires, ces équations sont vérifiées par les valeurs $x = C_1$, $y = C_2$, $z = C_3$. On s'en rend compte facilement puisque la relation (7) exprime que l'intégrale complète $V(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$ passe par le point M de coordonnées (C_1, C_2, C_3). L'enveloppe de cette inté-

grale complète admet donc ce point pour point conique, et l'arête de rebroussement de la surface enveloppe (ou du moins une partie) se réduit à ce point M. Il s'ensuit que les formules (4) doivent donner pour x, y, z des valeurs constantes toutes les fois que la fonction $\varphi(\alpha)$ est une intégrale de l'équation (8). Par conséquent, $\frac{dx}{d\alpha}, \frac{dy}{d\alpha}, \frac{dz}{d\alpha}$ doivent s'annuler identiquement quand on y remplace $\varphi'''(\alpha)$ par $-H[\alpha, \varphi(\alpha), \varphi'(\alpha), \varphi''(\alpha)]$. On a donc

$$(10)\quad \frac{dx}{d\alpha} = \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial f_1}{\partial \varphi}\varphi'(\alpha) + \frac{\partial f_1}{\partial \varphi'}\varphi''(\alpha) + \frac{\partial f_1}{\partial \varphi''}\varphi'''(\alpha)$$
$$= \frac{\partial f_1}{\partial \varphi''}[\varphi'''(\alpha) + H(\alpha, \varphi, \varphi', \varphi'')],$$

et de même

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{d\alpha} = \dfrac{\partial f_2}{\partial \varphi''}[\varphi''' + H(\alpha, \varphi, \varphi', \varphi'')], \\ \dfrac{dz}{d\alpha} = \dfrac{\partial f_3}{\partial \varphi''}[\varphi''' + H(\alpha, \varphi, \varphi', \varphi'')]; \end{cases}$$

les relations qui en résultent entre les dérivées partielles des fonctions f_1, f_2, f_3 par rapport à $\alpha, \varphi, \varphi', \varphi''$ sont aisées à vérifier directement en partant des équations (3).

Cela posé, toutes les intégrales de l'équation (6) vérifient aussi l'équation obtenue en la différentiant, c'est-à-dire l'équation

$$\frac{\partial \Phi}{\partial f_1}\frac{df_1}{d\alpha} + \frac{\partial \Phi}{\partial f_2}\frac{df_2}{d\alpha} + \frac{\partial \Phi}{\partial f_3}\frac{df_3}{d\alpha} = 0,$$

qui devient, en y remplaçant $\frac{df_1}{d\alpha}, \frac{df_2}{d\alpha}, \frac{df_3}{d\alpha}$ par les expressions précédentes

$$(12)\quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial \varphi''} + \frac{\partial \Phi}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial \varphi''} + \frac{\partial \Phi}{\partial f_3}\frac{\partial f_3}{\partial \varphi''}\right)[\varphi''' + H(\alpha, \varphi, \varphi', \varphi'')] = 0.$$

La nouvelle équation se décompose en deux équations distinctes, l'une du troisième ordre, l'autre du second ordre. Prenons d'abord l'équation du troisième ordre $\varphi''' + H = 0$, dont l'intégrale générale est représentée par l'équation

$$(13) \qquad V[C_1, C_2, C_3, \alpha, \varphi(\alpha)] = 0.$$

D'après ce qui a été expliqué plus haut, les fonctions f_1, f_2, f_3 correspondant à cette intégrale $\varphi(\alpha)$ se réduisent à C_1, C_2, C_3 et la fonction $\varphi(\alpha)$ définie par l'équation (13) sera une intégrale de l'équation (6) si les constantes C_1, C_2, C_3 vérifient la relation

$$\Phi(C_1, C_2, C_3) = 0.$$

On a ainsi l'intégrale générale de l'équation (6), avec deux constantes arbitraires; mais cette intégrale ne fournit pas une véritable solution du problème proposé, car l'arête de rebroussement de la surface enveloppe de l'intégrale complète $V[x, y, z, \alpha, \varphi(\alpha)] = 0$ se réduit à *un point* de la surface S.

Le second facteur peut s'écrire

$$(14) \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial\varphi''} + \frac{\partial\varphi}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial\varphi''} + \frac{\partial\Phi}{\partial f_3}\frac{\partial f_3}{\partial\varphi''} = \frac{\partial R}{\partial\varphi''} = 0;$$

les intégrales de l'équation $R = 0$ qui satisfont aussi à la condition $\frac{\partial R}{\partial\varphi''} = 0$ sont des intégrales *singulières*, qui vérifient l'équation du premier ordre

$$(15) \qquad \Pi[\alpha, \varphi(\alpha), \varphi'(\alpha)] = 0.$$

obtenue en éliminant φ'' entre les deux équations

$$R = 0, \qquad \frac{\partial R}{\partial\varphi''} = 0.$$

Dans le cas actuel, nous savons *a priori* qu'il existe une infinité d'intégrales singulières, dépendant d'une constante arbitraire, car ce sont les seules intégrales de l'équation (6) qui puissent donner la solution du problème proposé. On peut, d'ailleurs, déduire ce résultat de la théorie générale des solutions singulières des équations différentielles simultanées ([1]). Je rappellerai en quelques mots le résultat dont nous aurons besoin.

Une équation différentielle du second ordre, prise au hasard,

$$F(x, y, y', y'') = 0, \tag{16}$$

n'admet pas d'une façon normale d'intégrale singulière, c'est-à-dire d'intégrale satisfaisant en même temps à l'équation $\frac{\partial F}{\partial y''} = 0$. En effet, toute intégrale commune à ces deux équations doit satisfaire aussi à l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' = 0,$$

obtenue en différentiant la première. Les trois relations

$$F = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y''} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' = 0$$

admettent en général un certain nombre de solutions déterminées $y = \pi_1(x)$, $y' = \pi_2(x)$, $y'' = \pi_3(x)$ et, si F est quelconque, il est clair que $\pi(x)$ ne sera pas une intégrale, car il faudrait que l'on eût $\pi_2 = \pi'_1$, $\pi_3 = \pi'_2$. Si donc l'équation (16) admet une famille d'intégrales singulières, dépendant d'une constante arbitraire, les

---

([1]) E. Goursat, *Sur les solutions singulières des équations différentielles simultanées* (*American Journal of Mathematics* t. XI, 1889, p. 365).

trois équations

$$(17)\quad F(x, y, y', m) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} m = 0$$

admettent une solution commune en m pourvu que x, y, y' soient liées par une relation

$$(18)\qquad H(x, y, y') = 0.$$

Réciproquement, toutes les fois qu'il en est ainsi, les intégrales de l'équation du premier ordre (18) sont des intégrales singulières de l'équation $F = 0$. En effet, quand on se déplace le long d'une courbe intégrale de l'équation (18), y, y', m sont des fonctions de x vérifiant les relations (17), et par suite la relation

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' + \frac{\partial F}{\partial m} \frac{dm}{dx} = 0,$$

qui, rapprochée des précédentes, donne

$$\frac{\partial F}{\partial y'} (y'' - m) = 0.$$

On a donc aussi $y'' = m$, sauf dans le cas particulier où l'on aurait $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$. Il s'ensuit que toutes les intégrales de l'équation (18), pour lesquelles $\frac{\partial F}{\partial y'}$ n'est pas nul, sont des intégrales singulières de l'équation (16). Il est clair que l'équation $H = 0$ s'obtient en éliminant m entre les deux premières équations (17). On peut donc dire encore qu'une équation différentielle du second ordre admet une famille d'intégrales singulières déterminées par une équation différentielle du premier ordre toutes les fois que les trois équations (17) se réduisent à deux équations distinctes.

Cette condition est vérifiée dans le cas actuel, car la

dernière des équations (17) est, dans ce cas,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial f_1}\left(\frac{\partial f_1}{\partial\alpha}+\frac{\partial f_1}{\partial\varphi}\varphi'+\frac{\partial f_1}{\partial\varphi'}\varphi''\right)+\frac{\partial\Phi}{\partial f_2}\left(\frac{\partial f_2}{\partial\alpha}+\ldots\right)+\frac{\partial\Phi}{\partial f_3}(\ldots)=0,$$

ou, en tenant compte des relations qui lient les dérivées de f_1, f_2, f_3,

$$H(\alpha,\varphi,\varphi',\varphi'')\left(\frac{\partial\Phi}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial\varphi''}+\frac{\partial\Phi}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial\varphi''}+\frac{\partial\Phi}{\partial f_3}\frac{\partial f_3}{\partial\varphi''}\right)=0.$$

La seconde et la troisième des relations (17) ne sont donc pas distinctes.

3. Comme application de la méthode générale, nous allons déterminer les courbes gauches Γ, situées sur une quadrique de révolution, dont la tangente en chaque point fait un angle constant avec la parallèle à l'axe menée par ce point. Ces courbes, qui ont été l'objet d'un certain nombre de travaux [1], sont à la fois des hélices sur un cylindre et sur un cône, c'est-à-dire coupent sous un angle constant les génératrices d'un cône ayant pour directrice la courbe Γ et pour sommet un point O de l'espace; ce sont des hélices *cylindro-coniques*. De plus, ce sont les seules courbes jouissant de cette propriété. La démonstration géométrique est bien facile. Soit Γ une courbe gauche dont la tangente MT en un point quelconque M fait un angle constant V avec la droite MO qui joint le point M à un point fixe O, et un angle constant V′ avec la parallèle MQ à une droite fixe OO′. Désignons par r la distance OM, par p la distance MQ du point M à un plan fixe P perpendiculaire à OO′. D'après la formule géné-

---

[1] G. Pirondini, *Journal de Crelle*, t. 118, 1897, p. 61. — G. Scheffer, *Leipzig Berichte*, 1902, p. 369. — E. Cesaro, *Rendiconti di Napoli*, 1903, p. 73.

rale qui donne la variation de la longueur d'un segment de droite, on a, en désignant par ds l'élément d'arc de Γ,

$$dr = -\cos V\, ds, \qquad dp = -\cos V'\, ds,$$

et par suite

$$\cos V'\, dr - \cos V\, dp = 0.$$

Les angles V et V′ étant constants, par hypothèse, on a donc aussi

$$r \cos V' = (p - p_0) \cos V,$$

p_0 étant une nouvelle constante. Or $p - p_0$ représente la distance du point M à un plan fixe perpendiculaire à OO′. La relation précédente prouve que le rapport $\frac{r}{p - p_0}$ a une valeur constante le long de la courbe Γ, et par suite *cette courbe est située sur une quadrique de révolution autour de* OO′, *l'axe* OO′ *étant l'axe focal de la méridienne.*

Inversement, considérons une surface de révolution S engendrée par la rotation d'une conique autour de l'axe focal OO′, et soient Γ une courbe quelconque de cette surface, V et V′ les angles que fait la tangente en un point M de cette courbe avec la droite MO et la parallèle à l'axe OO′ menée par le point M. En désignant par p la distance du point M au plan directeur correspondant au foyer O, on a les relations

$$r = e\,p, \qquad dr = e\,dp,$$

e étant l'excentricité, et le calcul précédent prouve que l'on a aussi

$$\cos V = e \cos V'.$$

Si l'un des angles V, V′ est constant, il en est de même du second. On obtiendra donc toutes les hélices cylindro-coniques en déterminant *les courbes situées*

sur une quadrique de révolution, dont l'axe est l'axe focal de la méridienne, et dont la tangente fait un angle constant avec la parallèle à l'axe.

Il est à remarquer que les tangentes à Γ coupent aussi sous un angle constant les droites MO′ qui joignent un point quelconque de Γ au second foyer O′ de la méridienne. Donc, *toute courbe gauche qui est à la fois une hélice pour un cylindre et pour un cône est aussi une hélice pour un second cône, et elle coupe sous le même angle les génératrices de ces deux cônes.* (Pirondini.)

Il ne peut y avoir exception que si l'un des foyers est rejeté à l'infini (paraboloïde de révolution), ou si les deux foyers sont confondus (cône de révolution ou sphère).

4. D'une façon générale, il est clair que la détermination des courbes situées sur une surface de révolution, dont les tangentes font un angle constant avec l'axe, conduit à une équation différentielle du premier ordre qui s'intègre par une quadrature, si l'on prend pour axe des z l'axe de la surface, et si l'on emploie des coordonnées semi-polaires. Mais on peut aussi traiter ce problème par la méthode générale exposée au début de cette Note : c'est ce que nous allons faire. Rappelons d'abord rapidement comment on obtient les équations générales d'une hélice cylindrique. Toute courbe gauche Γ dont la tangente fait un angle constant avec l'axe Oz peut être définie comme l'arête de rebroussement d'une surface développable dont le cône directeur (T) a pour équation

$$x^2 + y^2 - z^2 \tang^2 V = 0.$$

Le plan osculateur Γ est donc parallèle à un plan tan-

gent au cône (T). Or le plan tangent à ce cône, suivant la génératrice dont les paramètres directeurs sont $\cos t$, $\sin t$, $\cot V$, a pour équation

$$X \cos t + Y \sin t - Z \operatorname{tang} V = 0;$$

tout plan parallèle à celui-là a pour équation

$$(19) \qquad x \cos t + y \sin t - z \operatorname{tang} V + f(t) = 0,$$

$f(t)$ étant une fonction arbitraire du paramètre t. Les coordonnées d'un point de l'arête de rebroussement s'en déduisent aisément, et l'on peut mettre les équations générales d'une hélice sous la forme

$$(20) \qquad \begin{cases} x = \cos t\, f''(t) + \sin t\, f'(t), \\ y = \sin t\, f''(t) - \cos t\, f'(t), \\ z = \cot V [f''(t) + f(t)]; \end{cases}$$

comme vérification, on déduit de ces formules

$$(21) \qquad \begin{cases} dx = \cos t [f'''(t) + f'(t)]\, dt, \\ dy = \sin t [f'''(t) + f'(t)]\, dt, \\ dz = \cot V [f'''(t) + f'(t)]\, dt, \end{cases}$$

et par suite

$$dx^2 + dy^2 = \operatorname{tang}^2 V\, dz^2.$$

Quand on multiplie $f(t)$ par une constante C, x, y, z sont multipliées par la même constante et l'hélice est remplacée par une hélice homothétique. Quand on remplace $f(t)$ par $f(t+\alpha)$, α étant constant, les formules (6) montrent facilement que la nouvelle hélice se déduit de la première par une rotation d'un angle α autour de l'axe Oz.

La détermination des hélices de cette espèce situées sur la surface S qui a pour équation $F(x, y, z) = 0$

conduit à l'équation du second ordre

$$(22)\quad F[\cos t f'' + \sin t f', \sin t f'' - \cos t f', \cot V(f'' + f)] = \Phi(t, f, f', f'') = 0,$$

d'où l'on déduit, en différentiant par rapport à t,

$$(23)\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial f''}(f''' + f') = 0.$$

L'intégrale générale de l'équation du troisième ordre $f''' + f' = 0$ est

$$(24)\qquad f = C_1 + C_2 \cos t + C_3 \sin t,$$

et les expressions correspondantes de x, y, z se réduisent bien à des constantes

$$x = -C_2, \qquad y = -C_3, \qquad z = C_1 \cot V,$$

et la formule (24), où les constantes C_1, C_2, C_3 sont liées par la relation

$$F(-C_2, -C_3, C_1 \cot V) = 0$$

représente l'intégrale générale de l'équation (22). Comme on l'a remarqué, aucune de ces intégrales ne donne une solution du problème proposé. La solution de ce problème est fournie par l'équation différentielle du premier ordre que l'on obtient en éliminant f'' entre les équations (22) et (23).

Dans le cas particulier où la surface S est de révolution autour de l'axe Oz, son équation est de la forme

$$x^2 + y^2 = F(z);$$

et l'on est conduit à une équation du second ordre de la forme

$$f''^2 + f'^2 = \psi(f + f''),$$

d'où l'on tire, en différentiant,

$$2f''f''' + 2f'f'' = \psi'(f + f'')(f' + f''').$$

Le facteur $f' + f'''$, égalé à zéro, donne l'intégrale générale, et, en éliminant f'' entre les deux équations

$$f''^2 + f'^2 = \psi(f + f''), \qquad 2f'' = \psi'(f + f''),$$

on aurait l'équation qui détermine les intégrales singulières. Au lieu de faire cette élimination, posons, en introduisant un paramètre auxiliaire u,

$$f + f'' = u, \qquad f'' = \frac{\psi'(u)}{2}, \qquad f = u - \frac{\psi'(u)}{2},$$

et par suite

$$f'^2 = \psi(u) - \left[\frac{\psi'(u)}{2}\right]^2.$$

La variable t s'exprime elle-même au moyen de u par une quadrature

$$t = \int \frac{\left[1 - \frac{\psi''(u)}{2}\right] du}{\sqrt{\psi(u) - \frac{\psi'^2(u)}{4}}}.$$

5. Prenons enfin le cas plus particulier où la surface S est une quadrique de révolution autour de Oz, représentée par l'équation

$$(25) \qquad x^2 + y^2 = az^2 + 2bz + c;$$

si l'axe Oz est l'axe focal de la méridienne, seul cas où l'hélice cylindrique puisse être en même temps une hélice conique, on a

$$a + 1 > 0, \qquad b^2 - ac > 0,$$

mais la méthode s'applique à tous les cas. L'équa-

tion (22) est ici

$$(26)\qquad f''^2 + f'^2 = a\cot^2 V(f'' + f)^2 + 2b\cot V(f'' + f) + c;$$

en écrivant que cette équation a une racine double en f'', on obtient l'équation du premier ordre qui définit les intégrales singulières

$$(27)\qquad (a\cot^2 V - 1)f'^2 + a\cot^2 V f^2 + 2b\cot V f + (b^2 - ac)\cot^2 V + c = 0.$$

Il est facile de vérifier que toute intégrale de l'équation (27) est aussi une intégrale de l'équation (26); en effet, en différentiant l'équation (27), on obtient la relation

$$(28)\qquad (a\cot^2 V - 1)f'' + a\cot^2 V f + b\cot V = 0,$$

que l'on obtiendrait aussi en différentiant l'équation (26) par rapport à f''. D'après la signification de l'équation (27), il est clair que l'équation (26) est une conséquence algébrique des équations (27) et (28).

Pour discuter toutes les formes possibles, nous supposerons d'abord que la méridienne est une conique à centre; ayant pris le centre pour origine, on a $b = 0$, et l'équation (27) devient

$$(29)\qquad \left(\frac{df}{dt}\right)^2 = \frac{a\cot^2 V}{1 - a\cot^2 V} f^2 + c.$$

Plusieurs cas sont à distinguer suivant le signe de $a(1 - a\cot^2 V)$.

Premier cas. — Soit $a(1 - a\cot^2 V) > 0$, ce qui entraîne $a > 0$.

La surface est un hyperboloïde à une nappe si $c > 0$, à deux nappes si $c < 0$, un cône si $c = 0$.

1° Soit $c < 0$, ce qui correspond à un hyperboloïde à deux nappes.

Posons

$$\frac{a\cot^2 V}{1 - a\cot^2 V} = m^2, \qquad c = -m^2 h^2;$$

l'équation (29) s'écrit

$$\left(\frac{df}{dt}\right)^2 = m^2(f^2 - h^2)$$

et l'intégrale générale est

$$f = h\cos\text{hyp.}\, m(t - t_0).$$

Comme on l'a déjà remarqué, on peut supposer $t_0 = 0$ sans changer la forme de l'hélice, ce qui donne, pour la projection de l'hélice sur le plan des xy,

$$x = hm[m\cos t\cos\text{hyp.}\, mt - \sin t\sin\text{hyp.}\, mt],$$

$$y = hm[m\sin t\cos\text{hyp.}\, mt - \cos t\sin\text{hyp.}\, mt],$$

$$\frac{dx}{dt} = hm(1 + m^2)\cos t\sin\text{hyp.}\, mt,$$

$$\frac{dy}{dt} = hm(1 + m^2)\sin t\sin\text{hyp.}\, mt,$$

$$\begin{aligned} \rho^2 = x^2 - y^2 &= h^2 m^4\cos^2\text{hyp.}\, mt + h^2 m^2\sin^2\text{hyp.}\, mt \\ &= h^2 m^2[(1 + m^2)\cos^2\text{hyp.}\, mt - 1], \end{aligned}$$

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = h^2 m^2(1 + m^2)\sin^2\text{hyp.}\, mt.$$

Il est facile, d'après ces formules, de se faire une idée de la forme de la courbe. Elle est symétrique par rapport à l'axe des x, et a un point de rebroussement sur cet axe; quand t croît de 0 à $+\infty$, ρ et ω croissent indéfiniment. Si l'on développe le cylindre sur un plan, l'hélice située sur une des nappes de l'hyperboloïde vient s'appliquer sur un système de deux demi-droites indéfinies.

2° Soit $c > 0$, hypothèse qui donne un hyperboloïde à une nappe. On pose dans ce cas $c = m^2 h^2$, et

l'équation (18) correspondante

$$\left(\frac{df}{dt}\right)^2 = m^2(f^2 + h^2)$$

a pour intégrale générale

$$f = h \sin\text{hyp.}\, m(t - t_0).$$

La projection de l'hélice sur le plan des xy est une spirale de forme analogue à celle du cas précédent, mais sans point de rebroussement. Si l'on développe la surface du cylindre sur un plan, l'hélice se transforme en une ligne droite indéfinie dans les deux sens.

3° Soit $c = 0$ (cône de révolution). L'équation (18) se décompose en deux équations distinctes $f' = \pm mf$, dont les intégrales générales sont respectivement

$$f = e^{m(t-t_0)}, \qquad f = e^{-m(t-t_0)}.$$

Prenons, par exemple, $f = e^{mt}$. On a alors

$$x = me^{mt}(m\cos t + \sin t), \qquad y = me^{mt}(m\sin t - \cos t),$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = m\sqrt{1 + m^2}\, e^{mt},$$

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{y}{x} = \frac{m\operatorname{tang} t - 1}{m + \operatorname{tang} t} = \frac{\operatorname{tang} t - \operatorname{tang}\alpha}{1 + \operatorname{tang} t \operatorname{tang}\alpha} = \operatorname{tang}(t - \alpha),$$

en posant $\operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{m}$. On a donc

$$\omega = t - \alpha,$$

et l'équation polaire de la courbe est

$$\rho = m\sqrt{1 + m^2}\, e^{m(\omega+\alpha)};$$

c'est une spirale logarithmique, et nous retrouvons l'hélice cylindro-conique ordinaire.

Deuxième cas. — Soit $a(1 - a\cot^2 V) < 0$. On

doit avoir nécessairement $c > 0$, et la surface peut être un ellipsoïde ou un hyperboloïde à une nappe, suivant le signe de a.

On pose, dans ce cas,

$$\frac{a \cot^2 V}{1 - a \cot^2 V} = -m^2, \qquad c = m^2 h^2.$$

L'équation (29) devient

$$\left(\frac{df}{dt}\right)^2 = m^2(h^2 - f^2),$$

dont l'intégrale générale est

$$f = h \cos m(t - t_0).$$

En prenant $t_0 = 0$, ce qui ne change pas la forme de la courbe, les formules (20) donnent

$$x = -hm^2 \cos t \cos mt - mh \sin t \sin mt,$$
$$y = -hm^2 \sin t \cos mt + mh \cos t \sin mt,$$

ce que l'on peut écrire

$$x = \frac{h(m - m^2)}{2} \cos(m + 1)t - \frac{h(m + m^2)}{2} \cos(1 - m)t,$$
$$y = \frac{h(m - m^2)}{2} \sin(m + 1)t - \frac{h(m + m^2)}{2} \sin(1 - m)t.$$

Ce sont des épicycloïdes, qui seront algébriques si m est commensurable. Quand on développe la surface du cylindre sur un plan indéfini, ces hélices se transforment en une ligne brisée formée d'une infinité de segments égaux. Les sommets de cette ligne brisée sont situés sur les génératrices qui passent par les points de rebroussement de l'épicycloïde.

Troisième cas. — Soit $a = 0$. La quadrique est un paraboloïde de révolution, et, si l'on a pris le sommet

pour origine, on a aussi $c = 0$. L'équation différentielle (27) est alors

$$f'^2 = 2b \cot V f + b^2 \cot^2 V$$

et l'intégrale générale

$$f = \frac{b \cot V}{2} [(t - t_0)^2 - 1].$$

Si l'on prend $t - t_0 = 0$, on trouve, en posant $\frac{b \cot V}{2} = m$,

$$x = 2m \cos t + 2mt \sin t,$$
$$y = 2m \sin t - 2mt \cos t,$$

équations qui définissent une développante de cercle.

Remarque. — Dans le cas d'un hyperboloïde à une nappe ($a > 0$, $b^2 - ac < 0$), les projections des hélices sur le plan des xy sont des courbes très différentes suivant le signe de $1 - a \cot^2 V$. Mais on a $a = \tang^2 \omega$, ω étant l'angle des génératrices rectilignes avec Oz. Si l'angle V est supérieur à l'angle ω, $1 - a \cot^2 V$ est positif, et les hélices se projettent suivant des spirales ayant des branches infinies. Si, au contraire, on a $V < \omega$, $1 - a \cot^2 V$ est négatif, et les hélices se projettent suivant des épicycloïdes. Dans le cas intermédiaire où $V = \omega$, $1 - a \cot^2 V$ est nul, et l'équation différentielle disparaît. Dans ce cas, les hélices cherchées sont les génératrices rectilignes, c'est-à-dire les caractéristiques de l'équation.

6. Ainsi que l'a remarqué M. Pirondini, les hélices cylindro-coniques ne sont pas les seules courbes gauches qui soient des hélices sur deux cônes. L'élégante démonstration suivante, due à M. Cesaro, permet de définir très simplement les courbes gauches les plus

générales qui jouissent de cette propriété. Soit Γ une courbe telle que la tangente MT en un point quelconque M de cette courbe fasse des angles constants V, V′ avec les droites MO, MO′ qui joignent le point M à deux points fixes O, O′; les distances $r = \mathrm{MO}$, $r' = \mathrm{MO'}$ vérifient les relations

$$dr = -\cos \mathrm{V}\, ds, \qquad dr' = -\cos \mathrm{V}'\, ds,$$

ds étant l'élément d'arc de Γ, d'où l'on tire

$$\cos \mathrm{V}'\, dr - \cos \mathrm{V}\, dr' = 0.$$

Les angles V, V′ étant constants, les distances r, r' vérifient donc une relation de la forme

$$r \cos \mathrm{V}' - r' \cos \mathrm{V} = \mathrm{K}, \tag{30}$$

K étant constant. La courbe Γ est donc située sur une surface de révolution engendrée par la rotation autour de OO′ d'une courbe plane C représentée par l'équation (30) en coordonnées bipolaires. Cette courbe C est une courbe du quatrième degré, appelée « ovale de Descartes », si V, V′, K sont quelconques. Inversement, soit S_4 la surface de révolution du quatrième ordre engendrée par la rotation autour de OO′ d'une courbe méridienne C_4 dont l'équation en coordonnées bipolaires est

$$ar + br' = c, \tag{31}$$

a, b, c étant constants. Soient Γ une courbe quelconque sur cette surface, V et V′ les angles que fait la tangente en un point M de Γ avec les droites MO, MO′. On a toujours la relation

$$\cos \mathrm{V}'\, dr - \cos \mathrm{V}\, dr' = 0;$$

mais on déduit de l'équation (31) $a\, dr + b\, dr' = 0$, et

par conséquent on a aussi, pour toute courbe Γ de cette surface,

$$a \cos V + b \cos V' = 0.$$

Le rapport $\frac{\cos V}{\cos V'}$ est donc constant; si l'un des angles V, V' est constant, il en est de même du second. Les courbes gauches qui sont les hélices de deux cônes différents s'obtiendront donc en déterminant *les courbes d'une surface* S_4 *qui coupent sous un angle constant les droites issues d'un des foyers de la méridienne.*

Une ovale de Descartes a en général un troisième foyer O'', distinct des premiers, tel qu'en appelant r'' la distance MO'', l'équation de cette courbe puisse aussi être mise sous la forme

$$a_1 r + b_1 r' = c_1,$$

les constantes a_1, b_1, c_1 ayant des valeurs différentes de a, b, c. Toute courbe de S_4 qui coupe sous un angle constant les droites issues de O coupe aussi sous un angle constant les droites issues de O'' et, par suite, *si une courbe gauche* Γ *est une hélice sur deux cônes différents, elle est aussi une hélice sur un troisième cône, et les sommets de ces trois cônes sont en ligne droite.*

Les hélices cylindro-coniques peuvent être considérées comme des cas limites des courbes précédentes. Si l'un des foyers est rejeté à l'infini, la courbe du quatrième ordre dégénère en une conique, et l'un des cônes devient un cylindre. Signalons encore le cas particulier de la sphère dont la courbe méridienne, la circonférence, peut être considérée d'une infinité de manières comme une ovale de Descartes, l'un des foyers étant le centre et deux autres points conjugués quelconques formant les deux autres foyers.

Pour appliquer la même méthode qu'au n° 5 à la

détermination de ces courbes en coordonnées cartésiennes, il faut d'abord obtenir explicitement les expressions générales des coordonnées d'un point d'une hélice conique en fonction d'un paramètre, d'une fonction arbitraire de ce paramètre et de ses dérivées du premier et du second ordre. Il suffit pour cela de connaître une famille de surfaces S à deux paramètres dont le plan tangent en un point quelconque M fait un angle constant V avec le rayon MO joignant le point M à un point fixe O. Pour obtenir des surfaces satisfaisant à cette condition, on peut procéder comme il suit. Dans un plan passant par O, considérons une spirale logarithmique ayant O pour foyer et dont la tangente fait l'angle V avec le rayon vecteur. En faisant tourner cette spirale autour d'une droite située dans son plan et passant par le foyer, il est clair que la surface obtenue satisfait à la condition voulue et ces surfaces dépendent de *trois* paramètres. Il suffira de donner à l'un de ces paramètres une valeur constante pour avoir une intégrale complète, d'où l'on pourra déduire les équations générales des hélices coniques.

Il est du reste bien facile d'obtenir les équations générales de ces courbes, sans passer par l'intermédiaire d'une équation aux dérivées partielles. Soient Γ une hélice conique sur un cône (T) de sommet O, C l'intersection de ce cône par une sphère de sommet O. Si l'on développe la surface du cône sur un plan, la courbe C se transforme en une circonférence, et la courbe Γ en une spirale logarithmique. La distance OM d'un point M de Γ au sommet O du cône a donc une expression de la forme

$$OM = ke^{hs},$$

k et h étant des constantes, s l'arc de la courbe C com-

pris entre une origine fixe et le point m où la droite OM rencontre cette courbe. Le problème sera donc résolu si l'on sait exprimer les coordonnées d'un point de la courbe C et l'arc de cette courbe explicitement en fonction d'un paramètre, d'une fonction arbitraire de ce paramètre et de ses dérivées. Il suffit pour cela de définir la courbe C comme l'enveloppe des grands cercles de la sphère normaux à une autre courbe de cette sphère choisie arbitrairement.

[R1e]

SUR DES SYSTÈMES ARTICULÉS;

PAR M. RAOUL BRICARD.

---

1. Considérons d'abord dans le plan m points A_1, $A_2, \ldots, A_m$ et n points $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Relions par des tiges rigides tous les points A à tous les points B (mais non les points A entre eux, ni les points B). On a ainsi mn tiges. Ces tiges étant supposées articulées aux points A et aux points B, pour quelles valeurs de m et de n, le système constitué sera-t-il déformable?

La figure formée par les $m+n$ points considérés dépend de $2(m+n)$ paramètres, dont $2(m+n)-3$ seulement sont des paramètres de grandeur. Comme mn conditions lui sont imposées, à savoir la constance des diverses longueurs A_iB_j, on voit que le système ne sera, en général, déformable que si l'on a

$$2(m+n)-3 > mn,$$

ce qui peut s'écrire

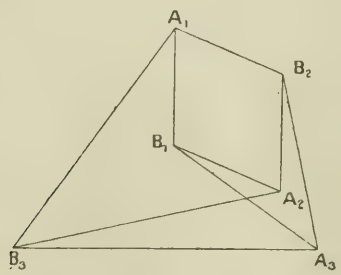
$$(m-2)(n-2) < 1. \tag{1}$$

Cette inégalité ne peut être satisfaite que si l'un des deux nombres m et n est égal à 2 ou à 1. On est ainsi conduit à des solutions banales.

Dans le cas où $m = n = 3$, l'inégalité (1) se change en égalité, et le système est strictement indéformable, à moins, peut-être, qu'il n'existe entre les diverses longueurs $A_i B_j$ certaines relations. On voit aisément que la figure est constituée par un hexagone dont les côtés ainsi que les diagonales joignant les sommets opposés ont des longueurs données. Les points A sont trois sommets non consécutifs de cet hexagone, les points B sont les trois autres.

Il y a donc lieu de rechercher si, dans des cas exceptionnels, un tel hexagone peut être déformable. Or, on reconnaît que le dispositif connu de Peaucellier, convenablement particularisé, fournit une solution du problème.

Soient, en effet (*voir* figure), $A_1 B_1 A_2 B_2$ un losange



articulé, $A_1 B_3$ et $A_2 B_3$ deux tiges de longueurs égales. On sait que si, le point B_3 étant fixe, le point B_1 décrit un cercle, le point B_2 décrit aussi un cercle, inverse du

premier par rapport au point B_3. Les centres des deux cercles sont alignés sur le point B_3, et leurs rayons aboutissant en B_1 et en B_3 doivent couper sous le même angle la droite $B_3B_1B_2$, d'où il résulte que ces rayons se coupent sur A_1A_2. Si donc on fait décrire au point B_1 un cercle dont le centre A_3 soit sur A_1A_2, le cercle décrit par B_2 aura aussi son centre en A_3. Réalisons alors les tiges rigides B_1A_3, B_2A_3 et B_3A_3, l'ensemble de la figure représente un système articulé déformable : on y reconnaît un hexagone $A_1B_1A_2B_2A_3B_3$, ayant pour diagonales A_1B_2, B_1A_3, A_2B_3.

On peut généraliser légèrement la définition du système, en supposant que $A_1B_1A_2B_2$ soit, non pas un losange, mais un *rhomboïde*

$$(A_1B_1 = A_1B_2,\ A_2B_1 = A_2B_2),$$

A_1B_3 et A_2B_3 satisfaisant à la relation

$$\overline{A_1B_3}^2 - \overline{A_2B_3}^2 = \overline{A_1B_1}^2 - \overline{A_2B_1}^2,$$

qui oblige les points B_1, B_2, B_3 à rester alignés. Cette généralisation du système de Peaucellier est connue.

On pourrait rechercher s'il existe d'autres solutions du problème.

2. Si l'on se pose le même problème dans l'espace, l'inégalité (1) doit être remplacée par la suivante :

$$3(m+n) - 6 < mn$$

ou

$$(m-3)(n-3) < 3.$$

Le cas intéressant est celui où l'on a $m = 4$, $n = 6$, pour lequel l'inégalité précédente se change en égalité. On obtient ainsi un système de 24 tiges qui sera, en

général, strictement indéformable. Il y aurait lieu de rechercher tous les cas de déformabilité.

On en trouve un en imposant au système d'être symétrique par rapport à une droite (ce qui, dans les problèmes de ce genre, conduit fréquemment à des solutions).

Considérons en effet la figure formée par cinq points de l'espace A_1, A_2, B_1, B_2, B_3 et une droite X, et complétons-la par les points A_3, A_4, B_4, B_5, B_6 respectivement symétriques des cinq premiers points par rapport à X.

La figure dépend de $3 \times 5 + 4 - 6 = 13$ paramètres de grandeur. Les 24 distances $A_i B_j$ sont deux à deux égales entre elles, en sorte qu'en assujettissant la figure à ce que ces distances soient invariables, on ne lui impose que 12 conditions. On a donc bien construit un système articulé déformable, de la sorte considérée.

3. On peut aussi, en s'appuyant sur d'autres considérations, construire un système de même sorte, *les points* A, *ainsi que les points* B, *étant en nombre infini.*

Envisageons, à cet effet, une ellipse E et une hyperbole H, focales l'une de l'autre, et ayant pour équations en coordonnées rectangulaires :

$$(E) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \qquad z = 0,$$

$$(H) \qquad \frac{x^2}{c^2} - \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0, \qquad y = 0,$$

avec la condition

$$(1) \qquad a^2 - b^2 = c^2.$$

Les coordonnées d'un point quelconque M de E

peuvent s'écrire :

$$x_1 = a\cos u, \qquad y_1 = b\sin u, \qquad z_1 = 0,$$

et les coordonnées d'un point quelconque N de H :

$$x_2 = c\,\mathrm{ch}\,v, \qquad y_2 = 0, \qquad z_2 = b\,\mathrm{sh}\,v,$$

u et v étant deux paramètres.

On a, comme expression de la distance des points M et N,

$$\overline{\mathrm{MN}}^2 = (a\cos u - c\,\mathrm{ch}\,v)^2 + b^2\sin^2 u + b^2\,\mathrm{sh}^2 v,$$

et, après des transformations faciles, en tenant compte de (1),

$$\overline{\mathrm{MN}}^2 = (a\,\mathrm{ch}\,v - c\cos u)^2.$$

Cela posé, considérons un nouveau couple de coniques focales l'une de l'autre :

$$\begin{array}{lll} (\mathrm{E}') & \dfrac{x^2}{a'^2} + \dfrac{y^2}{b'^2} - 1 = 0, & z = 0 \\ & & \qquad (a'^2 - b'^2 = c'^2), \\ (\mathrm{H}') & \dfrac{x^2}{c'^2} - \dfrac{z^2}{b'^2} - 1 = 0, & y = 0 \end{array}$$

dont les points M′ et N′ seront définis au moyen de paramètres u' et v', analogues à u et v. Au point M faisons correspondre le point M′, au point N le point N′, par les relations

$$(2) \qquad \begin{cases} c'\cos u' = c\cos u, \\ a'\,\mathrm{ch}\,v' = a\,\mathrm{ch}\,v. \end{cases}$$

On aura

$$\mathrm{M'N'} = \mathrm{MN}.$$

Il en résulte immédiatement que, si l'on relie un nombre quelconque de points M à un nombre quelconque de points N par des tiges rigides, le système

articulé ainsi constitué est déformable. Les points M restent constamment sur une ellipse, les points N constamment sur l'hyperbole focale de cette ellipse. On voit même que *le degré de liberté du système est le second*, puisqu'il n'y a aucune relation nécessaire entre l'ellipse E′ et l'ellipse E.

Il resterait à discuter l'étendue de la déformation possible du système, supposé physiquement réalisé. Je laisse ce soin au lecteur.

ERRATA.

Page 257, ligne 5 en remontant, *au lieu de* $\frac{\rho^2}{2}$, *lire* $\frac{r^2}{2}$.

Page 260, ligne 2, *au lieu de* $4x^2y^2$, *lire* x^2y^2.

[O¹6s]

ÉTUDE DES SURFACES DE TRANSLATION DE SOPHUS LIE;

PAR M. BERTRAND GAMBIER,
Professeur à la Faculté des Sciences de Rennes.

Sophus Lie a déterminé les surfaces de translation qui possèdent soit *deux* modes, soit une *infinité* de modes de génération comme surfaces de translation. Poincaré est revenu sur ce sujet et Darboux a imaginé en dernier lieu une méthode toute élémentaire, d'une élégance remarquable pour retrouver les surfaces de Lie (*Théorie des Surfaces*, t. I, 2e édition, p. 151).

Je crois intéressant de rendre accessibles ces résultats et de faire en particulier le dénombrement des surfaces algébriques qui rentrent dans les surfaces de Lie, en général transcendantes.

La partie difficile du problème est d'arriver à l'expression analytique par certaines intégrales abéliennes des coordonnées d'un point courant de la surface. Je me borne donc à partir de ces formules; je reprends la démonstration de Darboux, qui établit que les surfaces ainsi conçues *a priori* satisfont bien aux conditions imposées. J'insiste sur quelques propriétés qui jouent un rôle important, à savoir l'existence d'un centre de symétrie dans le cas le plus général.

Je cherche ensuite les conditions pour que la surface soit algébrique, ce qui donne une application intéressante des intégrales curvilignes aux courbes unicursales des troisième et quatrième ordres, en même temps

qu'une classification de ces courbes. J'indique ensuite tous les types algébriques.

Certaines surfaces minima transcendantes rentrent dans le problème de Lie; je les détermine et finis par une application très simple à l'espace à $n+1$ dimensions.

1. Soit la quartique plane Q la plus générale d'équation cartésienne $F(x, y) = 0$: elle peut être indécomposable ou bien décomposable (cubique et droite; deux coniques; une conique et deux droites; quatre droites). Je prends sur elle n points fixes $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Au point A_i j'associe un point variable M_i de Q et je considère la courbe gauche C_i lieu du point X_i, Y_i, Z_i défini par les intégrales curvilignes prises le long de Q

$$(1) \qquad X_i = \int_{A_i}^{M_i} \frac{x\,dx}{F'_y}, \qquad Y_i = \int_{A_i}^{M_i} \frac{y\,dx}{F'_y},$$
$$Z_i = \int_{A_i}^{M_i} \frac{dx}{F'_y}.$$

La courbe C_i admet pour cône directeur des tangentes le cône dont la trace sur le plan $z = 1$ a pour équation $F(x, y) = 0$. Si la quartique Q est indécomposable, les courbes $C_1, C_2, \ldots$ coïncident les unes avec les autres par une simple translation. Si la quartique Q se décompose, le point A_i est pris sur l'un des morceaux, soit q; le point M_i sera simplement assujetti à être sur q lui aussi; la courbe gauche C_i a pour cône directeur des tangentes celui qui a pour trace dans le plan $z = 1$ précisément la courbe q. Au cas où l'un des morceaux de décomposition de Q est une droite, nous éviterons de prendre deux couples (A_i, M_i) et (A_j, M_j) sur cette droite.

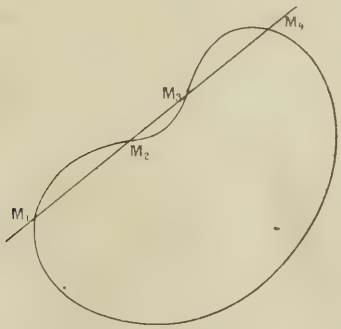
Je considère alors la surface Σ représentée par les

équations paramétriques

$$(2) \qquad \Sigma \begin{cases} \xi = X_1 + X_2, \\ \eta = Y_1 + Y_2, \\ \zeta = Z_1 + Z_2. \end{cases}$$

C'est manifestement une surface de translation ; le point μ de Σ correspondant à M_1 et M_2 peut être considéré comme parfaitement déterminé par M_1 et M_2 : nous pourrons donc adopter une représentation plane particulière de Σ qui consiste à tracer la courbe plane Q et à indiquer M_1 et M_2. D'après ce qui a été dit sur les cônes directeurs des tangentes de C_1 et C_2 nous pouvons même remarquer que si Q est tracée dans le plan $z = 1$, le plan mené de l'origine parallèlement au plan tangent de la surface en μ a précisément pour trace sur le plan $z = 1$ la droite M_1M_2, ce qui donne une représentation à la fois des éléments ponctuels et tangentiels de Σ (*fig.* 1).

Fig. 1.



Menons donc la droite M_1M_2 ; elle perce Q en deux autres points M_3, M_4 et je considère la surface Σ' lieu du point $\mu'(\xi', \eta', \zeta')$

$$(3) \qquad \Sigma' \begin{cases} \xi' = X_3 + X_4, \\ \eta' = Y_3 + Y_4, \\ \zeta' = Z_3 + Z_4. \end{cases}$$

Il est bien clair que, si Q est indécomposable ou bien si Q est décomposable en deux coniques véritables avec cette condition que M_1 soit sur l'une et M_2 sur l'autre, les deux surfaces Σ et Σ' coïncident par une translation. μ et μ' étant deux points où les plans tangents sont parallèles; dans tous les autres cas Σ et Σ' sont deux surfaces ne pouvant coïncider par une translation. Mais, propriété curieuse, dans tous les cas, sans exception, Σ et Σ' sont symétriques l'une de l'autre par rapport à un certain point fixe ω; μ et μ' se correspondent dans cette symétrie.

La démonstration est très simple : je rappelle d'abord que, si $\theta(x)$ est un polynome entier en x du quatrième degré à racines x_1, x_2, x_3, x_4 distinctes, la décomposition en éléments simples des fractions $\frac{1}{\theta(x)}$, $\frac{x}{\theta(x)}$, $\frac{x^2}{\theta(x)}$ fournit immédiatement les relations

$$(4)\quad \sum_1^4 \frac{1}{\theta'(x_i)} = 0, \qquad \sum_1^4 \frac{x_i}{\theta'(x_i)} = 0, \qquad \sum_1^4 \frac{x_i^2}{\theta'(x_i)} = 0.$$

Introduisons maintenant l'équation $y = p + qx$ de la droite $M_1 M_2$; on pourra prendre p et q comme paramètres indépendants au lieu des abscisses x_1 et x_2 de M_1 et M_2; x_1, x_2, x_3, x_4 sont les quatre racines de l'équation

$$(5)\qquad F(x, p + qx) \equiv \theta(x, p, q) = 0.$$

Puisque x_i, $(i = 1, 2, 3, 4)$, est une fonction de p, q satisfaisant toujours à $\theta(x_i, p, q) = 0$, on a

$$(6)\qquad \frac{\partial\theta}{\partial x_i}\,\partial x_i + \frac{\partial\theta}{\partial p}(x_i, p, q)\,dp + \frac{\partial\theta}{\partial q}(x_i, p, q)\,dq = 0.$$

On a évidemment

$$(7)\qquad \frac{\partial\theta}{\partial p} = \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial q} = x\frac{\partial F}{\partial y},$$

de sorte que l'équation (6) peut prendre la forme

$$(8)\qquad \frac{dx_i}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_i, y_i)} + \frac{dp + x_i\,dq}{\frac{\partial \theta}{\partial x_i}(x_i, p, q)} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Dans les formules (4), les coefficients du polynome $\theta(x)$ peuvent dépendre ou non de paramètres arbitraires; si nous les appliquons au polynome $\theta(x, p, q)$, on a par des combinaisons simples

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_1^4 \frac{dp + x_i\,dq}{\frac{\partial \theta}{\partial x_i}} = 0, \qquad \sum_1^4 x_i \frac{dp + x_i\,dq}{\frac{\partial \theta}{\partial x_i}} = 0, \\ &\sum_1^4 y_i \frac{dp + x_i\,dq}{\frac{\partial \theta}{\partial x_i}} = \sum (p - q x_i) \frac{dp + x_i\,dq}{\frac{\partial \theta}{\partial x_i}} = 0, \end{aligned}\right.$$

on déduit donc de (8) et (9)

$$(10)\qquad \sum_1^4 dX_i = 0, \qquad \sum_1^4 dY_i = 0, \qquad \sum_1^4 dZ_i = 0.$$

Les sommes

$$X_1 - X_2 + X_3 + X_4, \quad Y_1 + Y_2 - Y_3 - Y_4, \quad Z_1 - Z_2 + Z_3 - Z_4$$

sont donc égales respectivement à des constantes $2a$, $2b$, $2c$. Le point a, b, c est le milieu de tous les segments α, β', ce qui démontre la proposition. Si l'on fait varier la position d'un point A_i, on ne fait qu'imprimer un mouvement de translation à Σ ou Σ'; profitons de cette remarque pour prendre pour les points A_i, comme pour les points M_i, quatre points en ligne droite; alors a, b, c sont nuls tous trois, comme on le voit en faisant venir M_i en A_i; nous supposerons donc cette condition vérifiée; l'origine est donc centre de symétrie pour Σ et Σ'.

La propriété qui précède peut être interprétée à un

autre point de vue : j'écris

$$(11)\qquad \begin{cases} \xi = X_1 + X_2 = -X_3 - X_4, \\ \eta = Y_1 + Y_2 = -Y_3 - Y_4, \\ \zeta = Z_1 + Z_2 = -Z_3 - Z_4. \end{cases}$$

Appelons $(-C_i)$ la courbe gauche lieu du point $(-X_i, -Y_i, -Z_i)$. Les formules (11) montrent que la surface Σ qui est déjà surface de translation engendrée par le couple C_1, C_2 est encore surface de translation engendrée par le couple $(-C_3)$, $(-C_4)$.

La droite $M_1M_2M_3M_4$ nous a donné déjà deux surfaces Σ, Σ', analytiquement distinctes ou non, en associant les couples M_1M_2 et M_3M_4. Nous définirons de même les surfaces Σ_1, Σ'_1 en prenant les couples M_1M_3 et M_2M_4 et les surfaces Σ_2, Σ'_2 en prenant les couples M_1M_4 et M_2M_3. On remarquera que si Q est indécomposable, Σ, Σ_1, Σ_2 ne diffèrent que par une translation; Σ' n'étant autre que Σ sauf translation, la surface Σ admet un centre de symétrie.

Si Q se décompose en une droite et une cubique, je supposerai A_1 et M_1 sur la droite; C_1 est une courbe plane, mais à part cela Σ, Σ_1, Σ_2 ne diffèrent encore que par une translation; aucune des surfaces Σ, Σ_1, Σ_2 ne pouvant coïncider par translation avec Σ' ou Σ'_1 ou Σ'_2, on voit que chacune a perdu la propriété d'avoir un centre de symétrie. Chacune de ces six surfaces admet comme dans le cas général deux modes de génération distincts comme surface de translation; dans l'un des deux modes, l'une des courbes génératrices est plane.

2. Des propriétés toutes nouvelles se présentent si la quartique Q se décompose en deux coniques, que je supposerai d'abord non décomposables elles-mêmes. Posons $F(x, y) \equiv A(x, y)B(x, y)$ et supposons M_1,

M_2 choisis sur la conique A, M_3 et M_4 choisis sur la conique B. Les deux courbes C_1 et C_2 ne diffèrent que par une translation; les deux courbes C_3 et C_4 possèdent cette même propriété, mais ne sont pas égales aux courbes C_1 et C_2. Les surfaces Σ et Σ' non superposables sont symétriques l'une de l'autre par rapport à l'origine; les formules (11) montrent encore la double génération de Σ par le couple C_1, C_2 ou le couple $(-C_3, -C_4)$, mais nous allons montrer à l'instant que l'on peut substituer au couple $(-C_3, -C_4)$ une infinité d'autres, et de même au couple C_1, C_2, de sorte que Σ admet une infinité de modes de génération.

Les surfaces Σ_1, Σ_2, Σ'_1, Σ'_2 ne diffèrent que par une translation.

Je rappelle que nous devons écrire ici

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} X_1 &= \int_{A_1}^{M_1} \frac{x\,dx}{\frac{\partial A}{\partial y} B(x, y)}, & X_2 &= \int_{A_2}^{M_2} \frac{x\,dx}{\frac{\partial A}{\partial y} B(x, y)}, \\ X_3 &= \int_{A_3}^{M_3} \frac{x\,dx}{A(x, y) \frac{\partial B}{\partial y}}, & X_4 &= \int \frac{x\,dx}{A(x, y) \frac{\partial B}{\partial y}}, \end{aligned}\right.$$

et formules analogues pour $Y_1, Y_2, \ldots, Z_4$. Les intégrales curvilignes sont prises soit sur la conique A, soit sur la conique B. Remplaçons la conique B par la conique

$$B(x, y) - \rho A(x, y) = 0,$$

qui appartient au faisceau linéaire ponctuel (A, B), nous ne changeons pas les expressions de X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2; les courbes C_1 et C_2 et par suite la surface Σ ne changent pas; mais les courbes C_3 et C_4 sont remplacées par d'autres courbes; chaque valeur de ρ donne donc un nouveau couple de translation se substituant à $(-C_3, -C_4)$ pour la génération de Σ. Dans cette

opération, la variation de ρ fait changer les surfaces Σ_1 et Σ_2.

De même si je remplace la conique $A(x, y) = 0$ par la conique $A(x, y) - \sigma B(x, y) = 0$, on ne change pas sur Σ le couple $(-C_3, -C_4)$, mais on remplace le couple (C_1, C_2) par un nouveau couple pour chaque valeur de σ. La surface Σ admet donc une infinité de modes de génération comme surface de translation; je désigne par B_ρ la conique d'équation $B - \rho A = 0$; par A_σ la conique d'équation $A - \sigma B = 0$; si l'on remplace le couple de coniques (A, B) par le couple (A, B_ρ), les courbes $(-C_3, -C_4)$ qui engendrent Σ sont remplacées par les courbes $-C'_3$, $-C'_4$ définies par les intégrales curvilignes prises le long de B_ρ :

$$(13) \qquad -X'_3 = -\int \frac{x\,dx}{A\left[\frac{\partial B}{\partial y} - \rho\frac{\partial A}{\partial y}\right]}, \quad \ldots\ldots$$

De même si l'on remplace (A, B) par (A_σ, B), le couple (C_1, C_2) est remplacé par le couple C'_1, C'_2 défini par les intégrales curvilignes prises le long de A_σ

$$(14) \qquad X_1 = \int \frac{x\,dx}{B\left[\frac{\partial A}{\partial y} - \sigma\frac{\partial B}{\partial y}\right]}, \quad \ldots\ldots$$

Supposons alors que $\sigma = \frac{1}{\rho}$, les coniques A_σ et B_ρ coïncident; comme le long de B_ρ on a $B = \rho A$, on voit immédiatement que les formules (14) reviennent aux formules (13), de sorte que tous les modes de génération de la surface sont obtenus en conservant A et remplaçant B par la conique B_ρ.

Dans un faisceau ponctuel de coniques, il y en a trois qui se réduisent à un ensemble de deux droites, en nous bornant au cas le plus général; donc chacune de ces coniques donnera un mode de génération particu-

lier de Σ par deux courbes planes; il y a donc sur Σ six séries de courbes planes égales, dont la translation reproduit la surface.

Ceci dispense donc d'étudier le cas où les deux coniques A et B elles-mêmes sont dégénérées chacune en deux droites; les trois surfaces Σ, Σ_1 et Σ_2 obtenues ne sont pas plus générales que la surface Σ fournie par deux coniques véritables.

Dans le cas où A (lieu de M_1 et M_2) est une conique véritable, et B un ensemble de deux droites, la surface Σ est toujours l'une de celles que peut fournir un système de deux coniques véritables; mais la surface Σ_1 n'admet que deux modes de génération comme surface de translation, avec cette particularité que dans chacun d'eux l'une des courbes est plane.

Un cas exceptionnel se présente, à savoir celui où toutes les coniques du faisceau ponctuel se composent de deux droites; il suffit pour cela que les deux droites dont se compose A aient même point de concours que les deux droites dont se compose B; la surface Σ est alors un paraboloïde elliptique ou hyperbolique. Nous y reviendrons ultérieurement.

3. Une remarque élémentaire simplifie l'étude des divers cas possibles, soit au point de vue de la forme, soit au point de vue de la réalité de toutes les surfaces de Sophus Lie. Effectuer sur les variables (x, y) la transformation homographique la plus générale du plan

$$(15) \quad x = \frac{Ax' + By' + C}{A''x' + B''y' + C''}, \qquad y = \frac{A'x' + B'y' + C'}{A''x' + B''y' + C''}$$

revient à effectuer sur chacune des courbes C_i et par suite sur toutes les surfaces Σ, Σ_1, Σ_2 considérées la substitution homographique la plus générale qui con-

serve le plan de l'infini, définie en même temps que la substitution (15) par les formules

$$(16)\qquad \begin{cases} X_i = A X'_i + B Y'_i + C Z_i, \\ Y_i = A' X'_i + B' Y'_i + C' Z'_i, \\ Z_i = A'' X'_i + B'' Y''_i + C'' Z'_i. \end{cases}$$

Pour le voir aisément, rendons d'abord l'équation $F(x, y) = 0$ homogène, ce qui revient à remplacer x et y par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, $F(x, y)$ par $\frac{1}{z^3} F(x, y, z)$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ par $\frac{1}{z^3} \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z)$.

Les coordonnées X_i, Y_i, Z_i sont alors définies par les formules

$$(17)\qquad \begin{cases} X_i = \displaystyle\int_{A_i}^{M_i} \frac{x(z\,dx - x\,dz)}{\frac{\partial F}{\partial y}}, \\ Y_i = \displaystyle\int_{A_i}^{M_i} \frac{y(z\,dx - x\,dz)}{\frac{\partial F}{\partial y}}, \\ Z_i = \displaystyle\int_{A_i}^{M_i} \frac{z(z\,dx - x\,dz)}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \end{cases}$$

Les relations, vérifiées le long de Q,

$$(18)\qquad \begin{cases} x \dfrac{\partial F}{\partial x} + y \dfrac{\partial F}{\partial y} + z \dfrac{\partial F}{\partial z} = 0, \\ dx \dfrac{\partial F}{\partial x} + dy \dfrac{\partial F}{\partial y} + dz \dfrac{\partial F}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

donnent, le long de Q,

$$(19)\qquad \frac{y\,dz - z\,dy}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{z\,dx - x\,dz}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{x\,dy - y\,dx}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

$$= \frac{B(y\,dz - z\,dy) + B'(z\,dx - x\,dz) + B''(x\,dy - y\,dx)}{B\frac{\partial F}{\partial x} + B'\frac{\partial F}{\partial y} + B''\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Si l'on remarque qu'avec les nouvelles notations la substitution (15) est devenue

$$(15') \qquad \begin{cases} x = A\,x' + B\,y' + C\,z', \\ y = A'x' + B'y' + C'z', \\ z = A''x' + B''y' + C''z', \end{cases}$$

et si l'on définit la fonction $F'(x', y', z')$ par la relation

$$(20) \qquad F(x, y, z) = F'(x', y', z') \times \Delta,$$

où Δ est le déterminant de la substitution (15'), le dénominateur du dernier rapport (19) est $\Delta \times \frac{\partial F'}{\partial y'}$. Le numérateur est le déterminant

$$(21) \qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ dx & dy & dz \\ B & B' & B'' \end{vmatrix}$$

manifestement égal au produit des deux déterminants

$$(22) \qquad \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ dx' & dy' & dz' \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \Delta(z'\,dx' - x'\,dz').$$

Nous pouvons donc écrire

$$(23) \qquad \begin{cases} \dfrac{z\,dx - x\,dz}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = \dfrac{z'\,dx' - x'\,dz'}{\dfrac{\partial F'}{\partial y'}}, \\ X'_i = \displaystyle\int_{A'_i}^{M'_i} \frac{x'(z'\,dx' - x'\,dz')}{\dfrac{\partial F'}{\partial y'}}, \qquad Y'_i = \ldots, \qquad Z'_i = \ldots, \end{cases}$$

et alors les formules (17) se réduisent manifestement aux équations (16).

Cette remarque est précieuse pour obtenir les formes réduites des équations des surfaces Σ, surtout dans les cas de décomposition de la quartique Q.

4. Je traite immédiatement deux cas très simples, celui du paraboloïde et celui de l'hélicoïde gauche à plan directeur.

Soit un paraboloïde rapporté à un système de deux plans diamétraux conjugués et au plan tangent à l'extrémité du diamètre correspondant. L'équation de la surface est

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2z = 0, \tag{24}$$

qui montre immédiatement que les deux paraboles diamétrales peuvent engendrer par la surface comme surface de translation; il suffit d'écrire les expressions paramétriques

$$\left\{\begin{aligned} x &= x + 0, \\ y &= 0 + y, \\ z &= \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

Réciproquement, si une surface du second degré (non cylindrique) est surface de translation, chaque courbe de translation devant être la courbe de contact d'un cylindre circonscrit est une courbe plane diamétrale; dans le mouvement de translation, on a donc une famille de courbes diamétrales égales dans des plans parallèles, circonstance qui caractérise le paraboloïde.

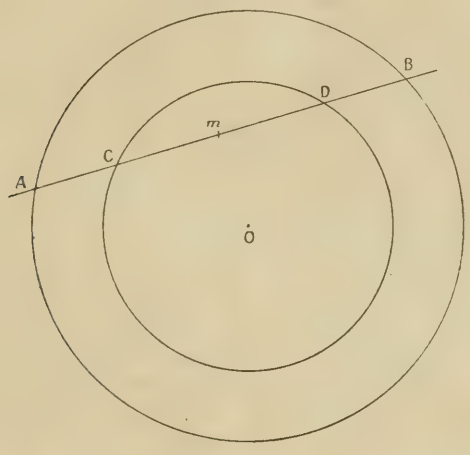
Un second exemple obtenu par des considérations élémentaires n'exigeant aucune quadrature est obtenu en étudiant deux cercles concentriques (*fig.* 2). Je les coupe par une droite arbitraire qui donne les points A, B sur le premier et C, D sur le second; soient R_1, R_2 les rayons; φ et φ' les arguments de A et B, ψ et ψ' ceux de C et D. En exprimant que m milieu de AB est aussi celui de CD et que la droite Om est bissectrice de AOB

ou COD, on a évidemment

$$(26)\quad \begin{cases} R_1(\cos\varphi + \cos\varphi') = R_2(\cos\psi + \cos\psi'), \\ R_1(\sin\varphi + \sin\varphi') = R_2(\sin\psi + \sin\psi'), \\ \dfrac{\varphi + \varphi'}{2} = \dfrac{\psi + \psi'}{2}, \end{cases}$$

la dernière équation nécessitant que l'on choisisse con-

Fig. 2.



venablement les déterminations des arguments. Si donc on pose

$$(27)\quad \begin{cases} x = \cos\varphi + \cos\varphi', \\ y = \sin\varphi + \sin\varphi', \\ z = \dfrac{\varphi + \varphi'}{2}, \end{cases}$$

la surface (27) est de translation et a pour équation

$$(28)\qquad \frac{y}{x} = \operatorname{tang} z;$$

c'est l'hélicoïde gauche à plan directeur; d'après les

formules (26), elle est aussi le lieu du point mobile

$$(29)\qquad \begin{cases} x = \lambda(\cos\psi + \cos\psi'), \\ y = \lambda(\sin\psi + \sin\psi'), \\ z = \dfrac{\psi + \psi'}{2}, \end{cases}$$

où λ est un paramètre arbitraire; pour chaque valeur de λ, on a un mode nouveau de génération comme surface de translation; toutes les courbes génératrices sont les hélices circulaires obtenues en coupant la surface par un cylindre de révolution arbitraire contenant l'axe Oz.

Les formules (26) conduisent en même temps à la surface

$$(30)\qquad \begin{cases} x = \cos\varphi - \lambda\cos\psi = \lambda\cos\psi' - \cos\varphi', \\ y = \sin\varphi - \lambda\sin\psi = \lambda\sin\psi' - \sin\varphi', \\ 2z = \quad\varphi - \quad\psi = \quad\psi' - \quad\varphi', \end{cases}$$

dont les deux modes de génération sont mis en évidence, surface qui a pour équation

$$(31)\qquad x^2 + y^2 = 1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos 2z.$$

Cette nouvelle surface a retrouvé un centre de symétrie, conformément à la théorie générale; elle est périodique, de révolution, et tout entière comprise entre deux cylindres de révolution d'axe Oz et de rayon $1+\lambda$ et $1-\lambda$.

Nous pouvons remarquer qu'au point de vue général où nous nous étions placés dans les paragraphes précédents, une transformation homographique quelconque est indifférente, pourvu qu'elle conserve le plan de l'infini. Au point de vue de la réalité, nous pouvons obtenir des formes bien distinctes. Par exemple, changeons dans l'équation (31) x, y, z en ix, iy, iz; nous

obtenons, si λ est > 0, une surface de translation réelle d'équation

$$(32) \qquad x^2 + y^2 = 2\lambda \operatorname{ch} 2z - 1 - \lambda^2,$$

où les quatre réseaux de translation sont tout entiers imaginaires, tandis qu'ils sont réels sur la surface (31). De même changeons z en iz dans (31), nous avons une nouvelle surface de translation à réseaux imaginaires

$$(33) \qquad x^2 + y^2 = 1 + \lambda^2 - 2\lambda \operatorname{ch} 2z$$

de forme bien différente, suivant que λ est positif ou négatif. Changeons dans (31), (32) ou (33) y en iy, nous avons trois surfaces qui, en réalité, se réduisent à deux :

$$(34) \qquad \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos 2z, \\ x^2 - y^2 = 2\lambda \operatorname{ch} 2z - 1 - \lambda^2. \end{cases}$$

Ces deux nouvelles surfaces sont réelles et à réseaux de translation tous imaginaires.

De même l'hélicoïde (28) aurait donné, par la substitution de iy et iz à y et z, une surface réelle

$$(35) \qquad \frac{y}{x} = \operatorname{th} z$$

ayant une infinité de modes de génération par courbes toutes imaginaires.

La plupart des surfaces de Sophus Lie sont transcendantes; elles possèdent des propriétés importantes. L'étude détaillée de toutes ces surfaces serait trop longue ici; elle exigerait d'étudier d'abord le cas où la quartique Q est indécomposable et de genre 3, 2, 1 ou 0; dans le cas de genre 2, il faudrait encore distinguer si le point double est à tangentes réelles et distinctes, ou point de rebroussement, ou point double isolé; dans le cas de genre 1 ou 0, mêmes remarques avec cette complication que les points doubles peuvent

être isolés, ou qu'un point double unique peut compter pour deux ou même trois, etc.

De même dans le cas de la quartique décomposée en une cubique et une droite, il faudrait envisager le genre de la cubique et la nature des points communs à la cubique et à la droite.

Dans le cas de deux coniques, les seuls caractères distinctifs sont fournis par la disposition des points communs aux deux coniques. Par exemple, si les quatre points sont distincts et réels, on profite de la transformation homographique du plan pour envoyer à l'infini sur Ox et Oy deux sommets du triangle conjugué commun, ce qui est possible d'une infinité de façons par une transformation réelle; on peut alors prendre pour coniques de base du faisceau ponctuel étudié plus haut les deux coniques

$$(36) \qquad x(1-y)=0, \qquad y(1-x)=0,$$

et alors on trouve sans peine la surface d'équation

$$(37) \qquad Ae^x + Be^y + Ce^z = 1$$

signalée par M. Darboux (*loc. cit.*, p. 160).

Je crois intéressant de terminer cette étude en indiquant dans quels cas on trouve des surfaces algébriques et de donner les formes réduites de ces surfaces, en tenant compte aussi, pour la réalité, des diverses formes attachées à un même type réduit.

5. Traitons d'abord le cas de quartique Q indécomposable; si elle est de genre non nul, elle admet au moins une intégrale de première espèce, fonction essentiellement transcendante, intégrale de la forme

$$\int \frac{(\alpha x + \beta y + \gamma)\,dx}{\dfrac{\partial F}{\partial y}},$$

où α, β, γ sont des constantes numériques déterminées; avec nos notations, cette intégrale s'écrit

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z;$$

il est donc impossible que X, Y, Z soient algébriques toutes trois, donc chacune des courbes génératrices, ainsi que la surface, est transcendante.

Il n'y a donc qu'à supposer la quartique Q unicursale; exprimons x, y rationnellement en t; chacune des intégrales

$$(38)\qquad \int \frac{x\dfrac{dx}{dt}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}\,dt, \qquad \int \frac{y\dfrac{dx}{dt}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}\,dt, \qquad \int \frac{\dfrac{dx}{dt}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}\,dt$$

porte sur une fraction rationnelle en t qui n'a d'autres pôles que les valeurs de t correspondant aux points multiples; si la courbe possède trois points doubles distincts à tangentes distinctes, chaque point double donne deux pôles simples, donc la surface est transcendante, chacune des coordonnées étant exprimée par une somme de termes rationnels et de termes logarithmiques. Si, au contraire, chaque point double est point de rebroussement, on obtient des pôles doubles et l'on constate en faisant l'intégration que chaque intégrale est algébrique; ce point résulte de la théorie générale des intégrales abéliennes, mais ici il nous suffira de le constater. Si la courbe Q a trois points de rebroussement, l'un d'eux est sûrement réel, nous le supposerons à l'origine; si les deux autres sont imaginaires, nous pouvons d'une infinité de façons, par une transformation homographique réelle, les supposer confondus avec les points cycliques et l'on sait qu'alors la courbe est une cardioïde, dont nous prenons l'équation

sous les formes

$$(39)\qquad \begin{cases} (x^2+y^2-2Rx)^2 = 4R^2(x^2+y^2), \\ \rho = 2R(\cos\omega+1), \end{cases}$$

suivant qu'il s'agit de coordonnées cartésiennes ou polaires. En posant $\tang\frac{\omega}{2} = t$, on a aisément

$$(40)\qquad \begin{cases} x = 4R\dfrac{1-t^2}{(1+t^2)^2}, \qquad y = 8R\dfrac{t}{(1+t^2)^2}, \\ x^2+y^2 = \dfrac{16R^2}{(1+t^2)^2}, \qquad x^2+y^2-2Rx = \dfrac{8R^2}{1+t^2}, \\ \dfrac{1}{4}F'_y = y(x^2+y^2-2Rx-2R^2). \end{cases}$$

On constate sans peine que $\frac{dx}{dt}$ et F'_y ne diffèrent que par un facteur numérique; comme on peut multiplier X, Y ou Z par un facteur arbitraire, on a donc à calculer les intégrales

$$(41)\qquad \begin{cases} \int dt = t, \qquad \int\frac{(1-t^2)\,dt}{(1+t^2)^2} = \frac{t}{1+t^2}, \\ \int\frac{-2t\,dt}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{1+t^2}. \end{cases}$$

Coupons la cardioïde par une droite : soient t_1, t_2, t_3, t_4 les valeurs du paramètre des quatre points obtenus; on sait que

$$\sum t_i, \quad \sum\frac{t_i}{1+t_i^2} \quad \text{et} \quad \sum\frac{1}{1+t_i^2}$$

sont constantes, quelle que soit la droite; supposons en particulier la droite parallèle à Oy, les t_i sont deux à deux égaux et de signe contraire, donc

$$\sum t_i = 0, \qquad \sum\frac{t_i}{1+t_i^2} = 0:$$

pour avoir la dernière somme, prenons l'axe Oy lui-même; on a alors

$$t_1 = t_2 = \infty, \qquad t_3 = t_4 = 1, \qquad \sum \frac{1}{t_i^2 - 1} = 1.$$

Nous aurons donc une surface de translation S ayant son centre à l'origine en prenant

$$(42) \qquad \begin{cases} z = \frac{1}{4}(t_1 - t_2), \\ x = \frac{2t_1}{1+t_1^2} + \frac{2t_2}{1+t_2^2}, \\ y = \frac{2}{1+t_1^2} - \frac{2}{1+t_2^2} - 1. \end{cases}$$

Comme on vérifie aisément les relations

$$x = \frac{2(t_1+t_2)(1-t_1t_2)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)} = \frac{8z(1-t_1t_2)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)},$$

$$x^2 - y^2 = 1 + \frac{8(1+t_1t_2)}{(1+t_1^2)(1+t_2^2)},$$

une simple comparaison montre que l'équation de la surface S est

$$(43) \qquad z(x^2 - y^2) = x - z.$$

On trouve ainsi une surface à centre du troisième degré lieu des milieux des cordes de la cubique gauche

$$(44) \qquad z = \frac{t}{2}, \qquad x = \frac{4t}{1+t^2}, \qquad y = \frac{4}{1+t^2} - 1.$$

ou encore lieu des milieux des cordes de la cubique

$$(45) \qquad z = -\frac{t}{2}, \qquad x = \frac{-4t}{1+t^2}, \qquad y = \frac{-4}{1+t^2} - 1.$$

symétrique de la précédente par rapport à l'origine.

Chacune des cubiques (44) et (45) est l'enveloppe sur la surface (43) des cubiques génératrices de l'une ou l'autre série; la cubique (44) et la cubique (45) sont deux asymptotiques particulières de la surface. La cubique (44) partage la surface en deux régions telles que par chaque point de l'une passent deux cubiques réelles du système (44), et que par chaque point de l'autre région ne passe aucune cubique réelle de ce système.

On peut remarquer que la surface est engendrée si l'on veut par le cercle d'équations

$$(46)\qquad \left\{\begin{aligned} z &= z_0, \\ x^2 + y^2 &= 1 + \frac{x}{z_0}, \end{aligned}\right.$$

dont le plan reste parallèle à xOy et dont la projection sur xOy engendre un faisceau ponctuel.

Remarquons maintenant qu'en remplaçant x, y, z par ix, iy, iz la surface étudiée est remplacée par une surface homothétique S_1, encore réelle, d'équation

$$(47)\qquad z(x^2 + y^2) + x + z = 0,$$

engendrée cette fois par des cubiques toutes imaginaires; la nouvelle surface sera lieu des milieux des cordes des cubiques (imaginaires conjuguées l'une de l'autre)

$$(48)\qquad z = \frac{t}{2}, \qquad x = \frac{4t}{1 - t^2}, \qquad y = \frac{-4i}{1 - t^2} - i,$$

ou encore

$$(49)\qquad z = \frac{t}{2}, \qquad x = \frac{4t}{1 - t^2}, \qquad y = \frac{4i}{1 - t^2} - i.$$

Dans les équations (42), remplaçons x et z par ix

et iz, et en même temps t_1 et t_2 par it_1 et it_2 ; nous obtenons une nouvelle surface S_2 réelle du troisième degré, engendrée de deux façons différentes par des cubiques réelles. L'équation de S_2 est

$$z(-x^2-y^2)=x+z \tag{47}$$

avec la représentation paramétrique

$$\left\{\begin{aligned} z &= \frac{1}{4}(t_1+t_2),\\ x &= \frac{2t_1}{1-t_1^2}+\frac{2t_2}{1-t_2^2},\\ y &= \frac{2}{1-t_1^2}+\frac{2}{1-t_2^2}-1 \end{aligned}\right. \tag{48}$$

Au paragraphe I, j'ai expliqué en détail que la quartique Q est, si l'on veut, la trace sur le plan $z=1$ du cône directeur des tangentes de la courbe C qui engendre la surface par sa translation. Pour la surface S d'équation (43), x, y, z désignant les coordonnées d'un point de la cubique génératrice, $\frac{dx}{dz}$ et $\frac{dy}{dz}$ sont donc les coordonnées dans le plan $z=1$ d'un point de Q; or, pour passer de S à S_2, on a remplacé x par ix et z par iz, donc dans cette transformation on conserve la coordonnée x d'un point de Q, mais on multiplie la coordonnée y par i.

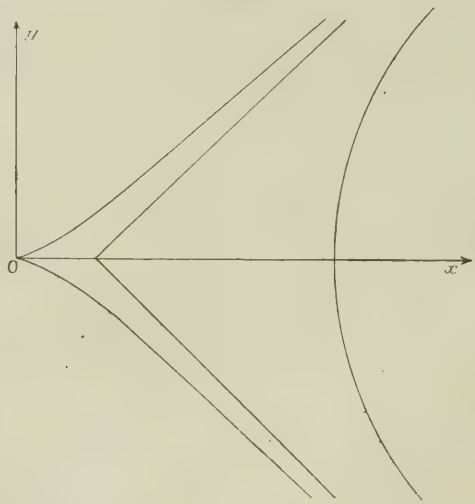
Cela revient à remplacer la cardioïde par la quartique

$$(x^2-y^2-2Rx)^2-4R^2(x^2-y^2)=0, \tag{49}$$

qui a un point de rebroussement à l'origine et deux autres à l'infini dans les directions $x\pm y=0$. Toute quartique unicursale à trois points de rebroussements

réels et distincts peut être ramenée par une perspective ou transformation homographique réelles à coïncider avec cette quartique (49); donc nous n'avons pas de calculs nouveaux à faire dans le cas où l'on passe de trois points de rebroussements, dont un seul est réel au cas où les trois sont réels [1]. La forme de cette nouvelle quartique (*fig.* 3) montre qu'il y a des droites la rencontrant en quatre points réels, de sorte qu'il y a

Fig. 3.



des points de la surface S_2 où les quatre cubiques qui y passent sont réelles. Comme plus haut, les deux cubiques symétriques

$$(50)\qquad z = \frac{t}{2}, \qquad x = \frac{4t}{1-t^2}, \qquad y = \frac{4}{1-t^2} - 1;$$

$$(51)\qquad z = \frac{-t}{2}, \qquad x = \frac{-4t}{1-t^2}, \qquad y = \frac{-4}{1-t^2} + 1$$

---

[1] Dans le cas de trois points de rebroussements réels, on peut,

sont des asymptotiques de S_2, des séparatrices; S_2 est le lieu des milieux des cordes de chacune. Enfin, en remplaçant dans S_2 x, y, z par ix, iy, iz, on a une nouvelle surface S_3 réelle d'équation

$$z(x^2 - y^2) = x + z \tag{52}$$

engendrée par la translation de quatre cubiques imaginaires toutes quatre. Les surfaces S, S_1, S_2, S_3 forment un cycle complet.

Je ferai remarquer que la surface S_2 ne diffère pas de la surface $xyz + x + y + z = 0$ signalée par Poincaré (*Journal de Mathématiques*, 1895); il suffit de poser

$$x - y = x_1, \qquad x + y = y_1, \qquad z = \frac{z_1}{2}$$

dans l'équation de S_2 pour la ramener à la forme de Poincaré.

D'autre part, toutes les cubiques gauches qui ont trois points à l'infini peuvent, par une transformation homographique réelle conservant le plan de l'infini, être ramenées soit à la cubique (44), soit à la cubique (50); nous en concluons que le lieu des milieux des cordes d'une cubique gauche qui a trois points distincts à l'infini est une surface de translation à centre du troisième degré, ayant deux modes de génération.

Nous verrons plus loin que le lieu des milieux des cordes d'une cubique gauche dont les points à l'infini ne sont pas distincts est encore une surface du troisième degré, ayant encore deux modes de génération, mais cette fois dépourvue de centre.

(*A suivre.*)

---

si l'on veut, transformer Q en une hypocycloïde à trois rebroussements.

[M'5]

SUR LA CUBIQUE A POINT DOUBLE ;

PAR M. NATHAN ALTSHILLER-COURT,
Docteur ès Sciences,
Professeur assistant à l'Université de l'État d'Oklahoma (États-Unis).

1. Une conique Σ_n, passant par deux couples de points *correspondants* AA', BB' d'une cubique (C_4^3) à point double O, rencontre la cubique en deux autres points M, M'. On sait que les couples de points correspondants d'une cubique à point double sont projetés d'un point quelconque de la courbe suivant une involution de rayons dont un des éléments doubles passe par le point double de la cubique. Ainsi, on a l'involution

$$(I) \qquad M(AA', BB', OO).$$

D'autre part, les deux couples de points donnés déterminent sur Σ_n une involution de points ayant pour pôle le point $R \equiv (AA', BB')$, pour polaire la droite joignant les deux points $C \equiv (AB, A'B')$, $C' \equiv (AB', A'B)$, et dont les points doubles sont les points d'intersection N, N' de Σ_n avec CC'. En projetant cette involution du point M de la conique, on obtient l'involution de rayons

$$(J) \qquad M(AA', BB', NN, N'N').$$

Les deux involutions (I) et (J) ont deux couples d'éléments communs, elles sont donc identiques, et le

rayon double MO de la première coïncide avec un des éléments doubles, disons MN, de la seconde. Ainsi les trois points M, N, O sont collinéaires. On montrera de la même manière que les trois points M′, N′, O sont également collinéaires.

Les quatre points M, M′, N, N′ déterminent un quadrangle complet inscrit dans Σ_n, dont les sommets du triangle diagonal sont $O \equiv (MN, M'N')$, $U \equiv (MM', NN')$, $U' \equiv (MN', M'N)$. Lorsque la conique Σ_n décrit le faisceau de coniques (Σ) ayant pour base les points A, A′, B, B′, la droite MM′ passe par un point fixe L de la cubique (C_4^3), le *corésiduel* des points A, A′, B, B′ (théorème de Chasles). La droite fixe OL coupe le faisceau harmonique de droites ayant pour centre le point U en trois points fixes O, L, $V \equiv (OL, UCC')$, le quatrième point $O' \equiv (OL, UU')$ est donc également fixe. Or, UU′ est la polaire de O par rapport à Σ_n, donc le point O′ est identique avec le conjugué de O par rapport au faisceau de coniques (Σ). Ainsi : *Le corésiduel des deux couples de points correspondants d'une cubique à point double (C_4^3) est collinéaire avec le point double et le conjugué du point double par rapport au faisceau de coniques déterminé par les quatre points donnés.*

La notation (C_4^3) désignera dans la suite une cubique à point double.

2. Le point U (1) est le pôle de OU′ par rapport à Σ_n, et puisque U est sur la droite CC′NN′, sa polaire OU′ passe par le pôle R de CC′ (1). La droite OR, passant par deux points fixes O et R, est elle-même une droite fixe, et il en est de même du point $F \equiv (OR, CC')$.

A la conique Σ_n du faisceau (Σ) correspond dans le

faisceau de rayons (L) la droite LU qui projette de L le conjugué harmonique U du point fixe F par rapport au couple de points N, N′ déterminé par Σ_n sur CC′. Cette construction montre qu'à la conique Σ_f de (Σ) passant par F correspond le rayon LF, c'est-à-dire le point F est sur (C_4^3). Ainsi : si AA′, BB′ sont deux couples de points correspondants d'une (C_4^3), les points C ≡ (AB, A′B′), C′ ≡ (AB, A′B) forment un troisième couple de points correspondants de la courbe (Maclaurin) (¹). *Le point d'intersection des droites* AA′, BB′ *est collinéaire avec le point double de la courbe et le troisième point commun à la cubique et la droite* CC′.

3. La construction du corésiduel (²) L des points A, A′, B, B′ (1) montre que L est le tangentiel commun des points C est C′. Il s'ensuit que F (2) est le point correspondant de L (Maclaurin) (³). Maintenant, si l'on prend pour C un point fixe de la courbe, son tangentiel L ainsi que son point correspondant C′ sont déterminés, ce qui détermine le correspondant F de L. Par conséquent : si, d'un point fixe C d'une (C_4^3), on projette un couple quelconque de points correspondants AA′, les droites CA, CA′ recoupent la courbe en un couple de points correspondants BB′ (Maclaurin) (⁴).

a. Le lieu du point d'intersection des droites AA′, BB′ *est une droite passant par le point double de*

(¹) De Jonquières, *Mélanges de Géométrie pure*, p. 243. Paris, 1856.

(²) G. Salmon, *Géométrie analytique*, traduction O. Chemin, p. 193-194. Gauthier-Villars, 1903.

(³) De Jonquières, *loc. cit.*, p. 226, prop. VII.

(⁴) De Jonquières, *loc. cit.*, p. 239, prop. XV.

la courbe et par le point correspondant du tangentiel de C.

b. Le conjugué du point double de la cubique par rapport au faisceau de coniques ayant pour base le système variable de points A, A′, B, B′ *est un point fixe*, car C détermine les points C′ et L, donc le point $V \equiv (OL, CC')$ est déterminé, et $(OO'LV) = -1$ (1).

4. Les trois couples de points correspondants AA′, BB′, CC′ (1, 3) sont les couples de sommets opposés d'un quadrilatère complet inscrit dans (C_1^3). Soient $R \equiv (AA', BB')$, $P \equiv (BB', CC')$, $Q \equiv (CC', AA')$ les sommets de son triangle diagonal. Le point $F \equiv (OR, CC')$ appartient à la cubique (3), et il en est de même, pour des raisons analogues, des points $D \equiv (OP, AA')$ et $E \equiv (OQ, BB')$. Les tangentiels L′, L″, L des trois couples AA′, BB′, CC′ sont collinéaires (Maclaurin) (1). Il s'ensuit que les trois couples de points correspondants DL′, EL″, FL (3) ont leurs tangentiels M_1, M″, M‴ en ligne droite. Le tangentiel du troisième point d'intersection G de la droite DE avec la cubique est collinéaire avec les tangentiels M_1 et M″ de D et E, ce tangentiel est donc le point M‴. Or, les points de contact des tangentes issues de M″ sont les points L et F, par hypothèse; le point G coïncide donc avec un de ces deux points, et puisque les points D, E, F ne sont pas collinéaires, le point G coïncide avec L. Ainsi : *Si un quadrilatère complet est inscrit dans une* (C_1^3), *les droites joignant le point double aux sommets du triangle diagonal rencontrent les côtés opposés respectifs en trois points de la cubique.*

---

(1) De Jonquières, *loc. cit.*, p. 223, prop. VI.

Les côtés du triangle ainsi formé recoupent la cubique aux tangentiels respectifs des couples de sommets opposés du quadrilatère donné.

5. Nous dirons que la droite joignant les deux points de contact des tangentes issues d'un point d'une (C_4^3) est la *corde associée* à ce point.

Les points M, M′ de la conique Σ_n (1) sont séparés harmoniquement par le point U et sa polaire OF par rapport à Σ_n (3). On retrouve ainsi un théorème de Maclaurin [1] : *Si, par un point d'une* (C_4^3), *on mène une sécante quelconque, les deux points d'intersection de la sécante avec la cubique sont séparés harmoniquement par la trace de la sécante sur la corde associée au point et par la droite joignant le point double au point correspondant du point donné.*

6. Considérons la conique Σ_l du faisceau (Σ) passant par L. Cette conique rencontre OL encore au conjugué harmonique V de L par rapport aux points doubles O, O′ de l'involution déterminée par (Σ) sur OL. Le second point d'intersection de Σ_l avec CC′ est le conjugué harmonique V′ de V par rapport au couple C, C′. Dans le faisceau de rayons (L) à Σ_l correspond la droite LF′ joignant L au conjugué harmonique F′ de F par rapport au couple V, V′ (2). Un des points d'intersection de LF′ avec Σ_l coïncide avec L, de sorte que la droite LF′ est tangente à la cubique en L. Le second point M‴ commun à Σ_l et LF′ est le tangentiel de L, et les trois points O, V′, M‴ sont collinéaires (1). Les quatre points C, C′, V, V′ étant harmoniques.

---

[1] De Jonquières, *loc. cit.*, p. 237, prop. XIV.

on a : *Les deux droites projetant du point double d'une* (C_1^3) *un couple de points correspondants de la courbe sont séparées harmoniquement par les droites projetant du même point le premier et le second tangentiels de ce couple.*

7. Les tangentes LC, LC′ forment un couple de rayons correspondants dans l'involution qui projette de L les couples de points correspondants de la cubique, et la droite OLV est un rayon double de cette involution. Le second rayon double est donc la droite LV′ (6). Or, la droite LF joignant L à son correspondant F (3) et la tangente LF′ en L sont séparées harmoniquement par LV, LV′ (6), donc : *La tangente en un point d'une* (C_1^3) *et la droite joignant ce point à son correspondant sont conjuguées dans l'involution projetant du point considéré les couples de points correspondants de la courbe.* (Théorème connu.)

8. La droite MN′(M′N), second élément double de l'involution de rayons qui projettent de M(M′) les couples de points correspondants de la cubique (1), est, comme on sait, tangente à la conique ω, enveloppe des droites joignant les couples de points correspondants de la courbe. Lorsque la conique Σ_n décrit le faisceau (Σ), le point U′ ≡ (MN′, M′N) décrit la droite fixe OF (1), de sorte que les tangentes U′MN, U′M′N′ décrivent une involution sur ω, dont la polaire est OF. La conjuguée harmonique U′O′ de U′OF par rapport au couple variable de tangentes U′N, U′N′ passe par le point fixe O′, donc O′ est le pôle de l'involution de tangentes sur ω. Or, la droite OU′ passe par O, donc O′ se trouve sur la polaire *i* de O par rapport à ω, laquelle polaire est, comme on sait, la

droite inflexionnelle de la courbe. On en trouvera d'ailleurs une démonstration plus loin. Ainsi : *Le conjugué du point double d'une* (C_4^3) *par rapport à un faisceau de coniques ayant pour base deux couples de points correspondants de la courbe est à l'intersection de la droite inflexionnelle avec la droite projetant du point double le corésiduel des points donnés* (1).

Conséquence : *La droite inflexionnelle d'une* (C_4^3) *est le lieu du conjugué du point double par rapport au faisceau de coniques variable ayant pour base deux couples de points correspondants quelconques de la cubique.*

9. On a vu (1) que $(OO'LV) = -1$. Si L coïncide avec un point I commun à i (8) et à la cubique, le point O′ coïncide avec I, il en sera donc de même du point V, c'est-à-dire que la corde associée à I passera par ce point, ce qui montre que I est un point d'inflexion. Ainsi un point d'intersection quelconque de la cubique avec i est un point d'inflexion, cette droite est donc la droite inflexionnelle, comme on vient de l'annoncer (8).

Dans la suite, la conique enveloppée par les droites joignant les couples de points correspondants d'une (C_4^3) sera désignée par la lettre ω.

Des deux tangentes qu'on peut mener d'un point L de la cubique à sa conique ω, l'une est la droite LF joignant L à son point correspondant F (3); l'autre tangente LV′ est celui des deux éléments doubles de l'involution de rayons projetant de L les couples de points correspondants, qui ne passe pas par le point double de la courbe. Cette droite projette de L un couple de points correspondants collinéaire avec L.

Dans la suite, cette droite sera appelée « la droite double du point L ».

10. Les tangentes U'N, U'N' (8) à la conique ω déterminent sur la tangente fixe CC' à ω le couple de points NN' séparés harmoniquement par les points fixes C, C' (1). Lorsque U' varie sur OF, l'involution de tangentes sur ω détermine sur CC' une involution de points dont les éléments doubles sont C, C'. Au point F (3) déterminé sur CC' par la polaire OF de l'involution de tangentes sur ω, correspond dans l'involution de points sur CC' le point de contact de CC' avec ω. Donc : *Le conjugué harmonique, par rapport à un couple de points correspondants d'une* (C_4^3), *du troisième point d'intersection avec la cubique de la droite joignant ces deux points, est le point de contact de cette droite avec la conique ω de la cubique.* (Théorème connu.)

11. Les points doubles C, C' (10) de l'involution sur CC' déterminée par l'involution de tangentes sur ω sont les traces sur CC' des rayons doubles de cette involution. Ces rayons passent par le pôle O' (8) de l'involution de tangentes. Il s'ensuit que : *Un couple de points correspondants d'une* (C_4^3) *est projeté du point de la droite inflexionnelle collinéaire avec leur tangentiel et le point double de la courbe, suivant deux tangentes à la conique ω de la cubique.*

Conséquence : *La droite inflexionnelle d'une* (C_4^3) *est le lieu du point d'intersection des droites doubles* (9) *d'un couple variable de points correspondants de la courbe.*

12. Les deux tangentes O'C, O'C' issues du point

O′ de i à la conique ω sont séparées harmoniquement par i et la droite joignant O′ au pôle O de i par rapport à ω (8). La droite i passe donc par le conjugué harmonique V′ de V par rapport à C, C′. Donc (6) : *La droite double d'un point d'une* (C_4^3), *la corde associée à ce point, la droite joignant le tangentiel du point au point double de la courbe et la droite inflexionnelle de la cubique, sont concourantes.*

Ces quatre droites forment un faisceau harmonique, car $(OO'LV') = -1$ (1).

Conséquences : *La droite inflexionnelle d'une* (C_4^3) *est le lieu du point d'intersection : a. de la droite double* (9) *d'un point variable de la courbe avec la corde associée à ce point; b. de la corde associée à un point variable de la courbe avec la droite joignant le tangentiel du point au point double de la courbe; c. de la droite double d'un point variable de la courbe avec la droite joignant le tangentiel du point au point double de la courbe.*

13. En coupant le faisceau harmonique (12) par la tangente LF′M‴ au point L à la cubique, on obtient la proposition : *La tangente en un point d'une* (C_4^3) *est coupée par la corde associée au point de contact et par la droite inflexionnelle de la courbe en deux points, lesquels, avec le point de contact et son tangentiel, forment une division harmonique.*

14. Les deux tangentes issues d'un point L d'une (C_4^3) à sa conique ω (9) coïncident si L appartient aussi à ω, et la tangente en L à la cubique coïncide alors avec elles (7); il s'ensuit que les deux courbes sont tangentes en chaque point qu'elles ont en commun.

Le point correspondant F (3) de L est situé sur une des tangentes de L à ω (9) et sur la polaire, par rapport à ω, du point $O' \equiv (i, OL)$ (8). Si L coïncide avec un point d'inflexion I, le point O' coïncide avec I (9), donc le point correspondant I' de I est le point d'intersection de la polaire p de I par rapport à ω avec une tangente à ω issue de I, c'est-à-dire I' appartient aussi à ω. Donc : *Une* (C_4^3) *est tangente à sa conique* ω *aux points où la cubique est touchée par les tangentes issues de ses trois points d'inflexion* [1].

15. Soient $X \equiv ip$ (14), Y le second point d'intersection de p avec ω, Z la trace sur p de la tangente en I (14) à la cubique. On a (7)

$$(OYI'Z) = -1 \quad \text{ou} \quad (OI'YZ) = 2;$$

on a aussi

$$(OXI'Y) = -1 \quad \text{ou} \quad (OI'YX) = \frac{1}{2},$$

d'où

$$(OXI'Z) = -3.$$

Ainsi : *La tangente issue d'un point d'inflexion d'une* (C_4^3) *correspond à la tangente en ce point à la courbe dans une homologie dont le centre et l'axe sont respectivement le point double et la droite inflexionnelle de la cubique, le rapport anharmonique étant égal à* -3.

16. Les points O, O' (1) séparent harmoniquement le point L de sa projection V, faite de O, sur la corde associée à L (3, 5). Le point O' appartenant à la droite fixe i (8), on a : *La projection d'un point variable*

---

[1] C. Servais, *Mathesis*, 1887, p. 73.

d'une (C_4^3), *faite du point double, comme centre, sur la corde associée au point variable, décrit une cubique* (H), *qui est la transformée de la courbe donnée dans une homologie harmonique ayant pour centre et axe respectivement le point double et la droite inflexionnelle de la courbe donnée.*

La courbe (H) sera appelée, dans la suite, « l'harmonique » de la courbe donnée.

Du mode de génération de (H), il suit que la cubique et sa courbe harmonique ont même point double, mêmes tangentes au point double et mêmes points d'inflexion.

Observons aussi que *la* (C_4^3) *et son harmonique* (H) *ont même conique* ω, car le centre O et l'axe d'homologie i étant pôle et polaire par rapport à ω (8), cette conique se correspond à elle-même dans la transformation considérée.

17. Le point F étant le correspondant de L (3), les deux tangentes issues de M''' à la cubique sont M'''L et M'''F (6). Le faisceau M'''(FLOV) est harmonique, car il est perspectif à $(FF'V'V) = -1$; il s'ensuit (7) que M'''V est la droite double de M''', de sorte que V est le point d'intersection de la corde associée à L avec la droite double du tangentiel M''' de ce point. Donc (16) : *La corde associée d'un point d'une* (C_4^3) *rencontre la droite double du tangentiel de ce point sur l'harmonique de la courbe donnée.*

18. La droite CC' joint le point C à son correspondant C' (2), le point M''' est le second tangentiel de C (4, 17); donc (16, 17) : *La droite joignant un point d'une* (C_4^3) *à son point correspondant et la droite double du second tangentiel du point considéré se coupent sur l'harmonique de la courbe donnée.*

19. La droite FCC′ projette du point F le couple de points correspondants CC′ collinéaire avec F, c'est donc la droite double de F(9). Le point M‴ est le tangentiel de F (4). Par conséquent (16, 17) : *La droite double d'un point d'une* (C_4^3) *et la droite double du tangentiel de ce point se coupent sur l'harmonique de la courbe donnée.*

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1920).

Mathématiques élémentaires.

I. — Concours spécial.

Un cercle variable Γ, tangent à une droite Δ donnée, en un point A donné, rencontre une autre droite Δ′ donnée, en deux points variables B et C. Soit T le triangle ABC.

On déterminera :

1° La situation (enveloppes, etc.) des bissectrices de T;

2° Le lieu du centre du cercle des neuf points de T;

3° L'enveloppe de la droite qui joint le centre de Γ au centre du cercle des neuf points;

4° L'enveloppe des hauteurs de T;

5° Le triangle T, en supposant donné

$$AB + AC + BC;$$

6° Le triangle T, en supposant donné

$$AB + AC - BC;$$

7° Deux points d'où l'on voit CC′ sous des angles constants, C′ désignant le milieu de AB.

II. — Concours normal.

I. Étant donnés deux segments rectilignes AB et A′B′, portés par deux droites qui se coupent en O, on prend sur la première droite un point variable M et sur la seconde un point M′ tel que $\frac{\overline{M'A'}}{\overline{M'B'}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$. Trouver le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle OMM′.

II. Étant donnés deux segments rectilignes AB et A′B′, portés par deux droites Δ et Δ′, on prend sur Δ deux points M′, M'_1, tels que $\frac{\overline{M'A'}}{\overline{M'B'}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$, $\frac{\overline{M'_1A'}}{\overline{M'_1B'}} = \frac{\overline{M_1A}}{\overline{M_1B}}$.

Trouver le lieu du centre de la sphère passant par les quatre points M, M_1, M′, M'_1, quand M_1 et M'_1 varient, M et M′ restant fixes.

Trouver l'enveloppe de ce lieu quand M et M′ varient.

Trouver le lieu du centre de la sphère tangente à Δ en M, et à Δ′ en M′, quand M et M′ varient.

III. Étant données trois droites Δ, Δ′, Δ″, on fixe trois points, A sur Δ, A′ sur Δ′ et A″ sur Δ″. On fait passer par ces trois points une sphère variable qui rencontre les trois droites en de nouveaux points M, M′, M″. Étudier le déplacement du plan MM′M″, en supposant que deux au moins des droites données sont dans un même plan.

Trouver le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle MM′M″ dans tous les cas où le plan de ce triangle reste parallèle à un plan fixe.

IV. Étant données trois droites Δ, Δ′, Δ″, on fixe trois points, A sur Δ, A′ sur Δ′ et A″ sur Δ″. On mène

par ces trois points une sphère variable Σ. Trouver le lieu géométrique des points communs à trois des plans perpendiculaires à Δ, Δ' ou Δ'', aux points où ces droites sont rencontrées respectivement par Σ.

V. Étant données deux sphères S et S_1, et trois tangentes communes à ces sphères, on suppose que les six points de contact sont sur une sphère. Que peut-on dire des positions relatives des trois droites, ou des sphères qui leur sont tangentes?

Mathématiques spéciales.

I. — Concours spécial.

I. On considère les deux droites Δ, Δ' qui, rapportées à trois axes rectangulaires, ont pour équations :

$$\Delta \begin{cases} x - d = 0, \\ x - z \tang \theta = 0, \end{cases} \qquad \Delta' \begin{cases} x + d = 0, \\ y + z \tang \theta = 0. \end{cases}$$

Former l'équation de la surface (P) lieu des points M de l'espace équidistants de Δ et Δ'. Montrer que le plan tangent à (P) au point M est perpendiculaire en son milieu I au segment NN′ qui joint les projections N, N′ du point M sur Δ et Δ'.

Quelles lignes doit décrire M sur (P) : 1° pour que l'un des points N, N′ reste fixe; 2° pour que NN′ = const.; 3° pour que la droite NN′ reste parallèle à un plan fixe?

II. Exprimer, en fonction des coordonnées $(\alpha\beta\gamma)$ du point M, celles du milieu I de NN′. Que décrivent le point I et la droite NN′ lorsque M décrit une droite tracée sur (P)? Montrer que si A, A′ sont les pieds de Δ et Δ' sur Ox on a $AN \pm A'N' =$ const. lorsque M décrit une droite tracée sur (P).

III. Un paraboloïde équilatère (P) d'équation $yz + ax = 0$ peut, d'une infinité de manières, être considéré comme lieu des points M équidistants de deux droites Δ, Δ'. Sur quelle surface doivent se trouver Δ et Δ'?

Montrer que Δ et Δ' sont conjuguées par rapport à (P).

La longueur (imaginaire) interceptée par (P) sur Δ est constante.

Le point M restant fixe sur (P) et le couple $(\Delta\Delta')$ variant, trouver le lieu du milieu I de NN', le lieu de la droite NN' et le lieu des points N, N'.

Le lieu de NN' est un plan Π. Quelle est son enveloppe quand M varie sur (P)?

Le lieu des points N, N' est une ellipse (E). Montrer que, lorsque M varie, la distance focale de (E) reste constante.

IV. Le lieu des points M de l'espace dont les distances à deux droites fixes Δ, Δ' non complanes sont dans un rapport constant k ($k \neq 1$) est un hyperboloïde à une nappe admettant la perpendiculaire commune à Δ et Δ' pour axe de symétrie transverse.

Inversement, étant donné un hyperboloïde à une nappe (H) d'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$ $(a > b)$, il n'est susceptible du mode de définition précédent que si l'on a $\frac{1}{b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}$.

Si cette relation est vérifiée, il existe une infinité de couples tels que (Δ, Δ'). Ces deux droites rencontrent Ox orthogonalement.

Sur quelle surface (S) doivent se trouver Δ et Δ'? Montrer que (S) est sa propre polaire réciproque par rapport à (H).

La longueur (imaginaire) interceptée par (H) sur Δ est constante.

Le lieu de la projection N du point M sur Δ lorsque Δ varie, M restant fixe, est l'intersection d'un cylindre circulaire droit et d'un cylindre parabolique.

On suppose Δ fixe et l'on considère les sphères tangentes à Δ et dont le centre M décrit (H). Montrer que l'enveloppe de ces sphères est une surface unicursale dont on évaluera le degré.

II. — Concours normal.

I. Dans un plan orienté on considère deux segments de droite AB, A'B'. Le lieu des points M du plan tels que l'on ait

$$\text{angle } AMB + \text{angle } A'MB' = 0$$

est en général une cubique passant par ABA'B'. Pour que ce lieu devienne une conique (celle-ci est alors une hyperbole équilatère), il faut et il suffit que les segments AA', BB' aient le même milieu.

Réciproquement, si AA', BB' sont deux couples de points diamétralement opposés sur une hyperbole équilatère, on a $\widehat{AMB} + \widehat{A'MB'} = 0$ lorsque M décrit la courbe.

II. Étant donnés quatre points ABA'B' dans un plan, le lieu des points M de ce plan tels que

$$(1) \qquad MA.MB = MA'.MB'$$

est en général une cubique. Pour que ce lieu devienne une conique (celle-ci est alors une hyperbole équilatère), il faut et il suffit que les segments AB, A'B' aient le même milieu.

Réciproquement, étant donnée une hyperbole équilatère (H) ayant pour équation $x^2 - y^2 - a^2 = 0$, il existe une infinité de couples AB, A'B' tels que M décrivant (H) on ait la relation (1). Le point A étant choisi

arbitrairement, il lui correspond des points *réels* BA′B′ déterminés sans ambiguïté par l'intersection de l'hyperbole (H′) passant par A ayant pour asymptotes Ox Oy, et de l'ovale de Cassini (Γ) passant par A ayant pour foyers $x = \pm a$, $y = 0$. Où doit se trouver A pour que A′, B′ viennent se confondre avec A et B? Déduire de ce cas et de la relation (1) appliquée à la limite que A et B étant deux points de (H) diamétralement opposés, on peut leur associer une direction Δ telle que, en désignant par α, β les angles de MA, MB avec Δ, on ait

$$\frac{MA}{\cos\alpha} = \frac{MB}{\cos\beta}$$

lorsque M décrit (H). Vérifier ensuite directement cette propriété.

III. L'hyperbole (H′) et la cassinienne (Γ) se coupent en 4 points réels AB, A′B′ et 4 points imaginaires A_1B_1, A_2B_2 deux à deux symétriques par rapport au centre O de (H). Montrer que les quatre droites AB, A′B′, etc. passant par O sont deux à deux rectangulaires. Exprimer explicitement en fonction des coordonnées (α β) du point A celles de B, A′, B′.

Quel est le lieu des points A′B′ lorsque A décrit une droite Δ issue de O? Quels sont les arcs utiles de ce lieu? Quel est le lieu de A′B′ lorsque A décrit un cercle de centre O?

IV. Soient AB, A′B′ deux segments ayant O pour milieu. On désigne par Γ_A, Γ_B deux cercles centrés en A et B, orthogonaux au cercle

$$x^2 + y^2 - K = 0;$$

par $\Gamma_{A'}$, $\Gamma_{B'}$ deux cercles centrés en A′ et B′, orthogonaux au cercle

$$x^2 + y - K' = 0 \qquad (K' \neq K).$$

Déterminer les points AB A′B′ de sorte que M décrivant (H), on ait la relation $\varpi_A \varpi_B = \varpi_{A'} \varpi_{B'}$, en désignant par ϖ_A, ϖ_B, etc. les puissances du point M par rapport aux cercles Γ_A, Γ_B, etc.

Les lieux de A, B, A′, B′ sont deux hyperboles conjuguées et AB, A′B′ en sont des diamètres conjugués.

Étant donnée une quadrique (Q), peut-on trouver deux couples de points AB, A′B′ tels que M décrivant (Q) on ait $MA \cdot MB = MA' \cdot MB'$. Montrer que (Q) doit être un hyperboloïde à deux nappes dont une hyperbole principale est équilatère. Cette condition étant remplie et en outre une certaine inégalité étant vérifiée, il existe une infinité de couples AB A′B′ de points *réels*. Leur lieu est une ellipse (E) et AB A′B′ forment un faisceau harmonique avec les diagonales du rectangle construit sur les axes de (E).

On considère une biquadratique sphérique, supposée réelle, ayant pour équations : $ax^2 + by^2 + cz^2 - 1 = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$. Existe-t-il des points AA′BB′ tels que M décrivant cette courbe on ait :

$$MA, MB = MA', MB' \text{ ?}$$

Trouver tous les couples tels que les segments AB, A′B′ aient pour milieux le centre O de la sphère.

Nota. — Il sera commode d'employer les coordonnées polaires pour la recherche des lieux des IVe et Ve parties.

Calcul différentiel et intégral.

(CONCOURS SPÉCIAL.)

1° Déterminer la surface S la plus générale dont les normales sont toutes tangentes à un cylindre de révolution C de rayon r.

On calculera les coordonnées x, y, z d'un point M de S en fonction des angles θ, φ qui définissent la direction de la normale MN à S en M, de sorte que les cosinus directeurs de cette normale soient :

$$\sin\theta\cos\varphi, \qquad \sin\theta\sin\varphi, \qquad \cos\theta.$$

(On supposera les trois axes de coordonnées rectangulaires et l'on prendra pour Oz l'axe du cylindre C.)

2° Déterminer géométriquement les lignes de courbure des surfaces S.

3° A quelle relation doivent satisfaire θ et φ le long d'une de ces lignes de courbure?

4° Les normales à la surface S sont tangentes non seulement au cylindre C, mais aussi à une seconde nappe C′ de la développée de S. Déterminer analytiquement la surface C′.

5° Montrer que les sections de S et de C′ par un plan quelconque parallèle à xOy sont des courbes simples.

6° Calculer les rayons de courbure principaux de S en un point M de S.

7° On suppose développé le cylindre C sur un des plans tangents et l'on y prend comme axes la génératrice de contact et le développement de la base du cylindre, les nouvelles coordonnées étant appelées z et σ. On appelle alors I et J les développements des intersections I_0 et J_0 du cylindre C avec les surfaces C′ et S et l'on demande de déterminer analytiquement I et J.

8° On demande de déterminer la développée de J.

9° On demande de déterminer S de sorte que la courbe I soit un cercle.

(CONCOURS NORMAL.)

Première partie. — Étant donné un système de trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz :

1° On considère la famille de courbes Γ_λ du plan des xy dont l'équation générale est

$$\cos x + \cos y = \lambda,$$

où λ est un paramètre réel arbitraire. On demande d'étudier la forme de ces courbes et leur position relative quand λ varie.

2° On considère la surface S dont l'équation est

$$\cos x + \cos y + \cos z = 1,$$

avec $-\pi \leq x \leq \pi$, $-\pi \leq y \leq \pi$, $-\pi \leq z \leq \pi$ et l'on demande d'en indiquer la forme.

3° Déterminer les lignes de plus grande pente de la surface S quand on considère xOy comme le plan horizontal.

4° Déterminer complètement chacune des lignes asymptotiques réelles de la surface S.

5° Déterminer les ombilics de la surface S.

6° Former l'équation différentielle des projections sur xOy des lignes de courbure de S.

7° Donner quelques indications sur la configuration du système de lignes de courbure de S et signaler les plus simples d'entre elles.

Deuxième partie. — Soient $f(x, y)$ une fonction développable en série de Taylor au point (x_0, y_0), Δf l'accroissement qu'elle prend quand x, y augmentent respectivement de Δx, Δy à partir des valeurs x_0, y_0 et df sa différentielle

$$f'_{x_0}\Delta x + f'_{y_0}\Delta y$$

au point x_0, y_0.

1° En supposant que f'_{x_0} et f'_{y_0} ne sont pas nuls, le rapport $\frac{\Delta f}{df}$ est en général déterminé. Montrer que sous

des conditions très générales il tend vers l'unité quand Δx et Δy tendent simultanément vers zéro.

2° Peut-il arriver cependant que $\frac{\Delta f}{df}$ ait une limite finie différente de l'unité quand Δx et Δy tendent simultanément vers zéro d'une façon spéciale?

3° Cette circonstance n'a-t-elle lieu que pour des fonctions $f(x, y)$ très particulières?

(On suppose, bien entendu, dans 1°, 2°, 3°, que Δx, Δy convergent vers zéro de sorte que le dénominateur du rapport $\frac{\Delta f}{df}$ tende vers zéro par valeurs non nulles.)

Mécanique rationnelle.

I. — Concours spécial.

Une barre homogène pesante de longueur $2a$ est mobile librement et sans frottement autour d'une de ses extrémités O supposée fixe.

1° Étudier le mouvement de la barre correspondant à des conditions initiales quelconques. On désignera par θ l'angle qu'elle fait avec la verticale descendante et par ψ l'angle que fait le plan vertical qui la contient avec un plan vertical fixe.

Examiner le cas où l'un des deux angles ψ et θ resterait constant.

2° On considère une circonférence matérielle fixe située dans un plan horizontal et ayant son centre sur la verticale du point O, au-dessous de ce point. A un moment donné, la barre s'appuyant sur cette circonférence, on lui imprime une rotation de vitesse angulaire ω autour de la verticale du point O. A quelle

condition doit satisfaire ω pour que la barre se détache de la circonférence ?

Si cette condition n'est pas réalisée, déterminer le mouvement de la barre en supposant qu'il y ait frottement au contact de la barre et de la circonférence, le coefficient de frottement étant f. Exprimer explicitement l'angle ψ en fonction du temps. On désignera par α l'angle constant que fait la barre avec la verticale.

3° On considère maintenant, au lieu de la circonférence précédente, une hélice circulaire matérielle fixe ayant pour axe la verticale du point O, pour rayon la demi-longueur a de la barre et un pas donné $2\pi h$. A un moment donné, la barre s'appuie sur cette hélice dans une position horizontale et elle est abandonnée à elle-même sans vitesse. Déterminer le mouvement de la barre, en supposant qu'il n'y ait *pas de frottement*. Calculer la réaction exercée par l'hélice. A quelle condition doit satisfaire le pas de l'hélice pour que la barre se détache de l'hélice avant que son extrémité opposée à O soit venue en contact avec l'hélice ? Montrer que, si cette condition est réalisée, l'angle ψ dont a tourné le plan vertical de la barre au moment où elle se détache de l'hélice est supérieur à une limite fixe qu'on déterminera.

4° On suppose de nouveau, comme dans la première partie, que le mouvement de la barre est absolument libre autour du point O. Un insecte de dimensions négligeables et de même masse que la barre est placé sur la barre qui est supposée suffisamment rugueuse pour que cet insecte puisse prendre le long de la barre un mouvement arbitraire.

La barre étant placée dans une position donnée est

abandonnée à elle-même sans vitesses. Si l'insecte garde sur la barre une position fixe M_0, définie par son abscisse u_0 comptée à partir du point O, la barre oscille comme un pendule simple. On suppose que la longueur l de ce pendule simple est supérieure à $2u_0$. Montrer que, les conditions initiales relatives à la barre restant les mêmes, l'insecte peut, et d'une infinité de manières, en partant du point M_0, prendre le long de la barre un mouvement tel que le mouvement qui en résulte pour la barre ne soit pas changé, c'est-à-dire que la barre oscille comme un pendule simple de longueur l. Déterminer explicitement ces mouvements de l'insecte pour $l = 4\,u_0$.

II. — Concours normal.

On considère le système matériel formé d'un corps solide pesant (S) assujetti par des liaisons sans frottement à la condition qu'une droite Δ invariablement liée à (S) reste dans un plan horizontal fixe (P), cette droite pouvant du reste se déplacer librement dans ce plan et le corps (S) pouvant tourner librement autour de Δ.

1° Former les équations différentielles du mouvement du système et montrer qu'elles peuvent s'intégrer par des quadratures. Indiquer, sans faire les calculs, quelle méthode on pourrait employer pour trouver les réactions du plan fixe (P).

On pourra prendre un trièdre trirectangle invariablement lié au corps (S), ce trièdre ayant pour origine le centre de gravité G du corps, l'axe Gy étant parallèle à Δ et l'axe Gx perpendiculaire au plan formé par le point G et la droite Δ. On désignera par c la distance

de G à la droite Δ, par θ l'angle de Gz avec la verticale ascendante, par ψ l'angle de Δ avec une direction horizontale fixe. Enfin on désignera par ξ, η, ζ les coordonnées de G par rapport à des axes fixes convenablement choisis.

2° Déterminer, parmi tous les mouvements possibles du système ceux qui se réduisent à une rotation autour d'un axe vertical fixe. Ces mouvements sont-ils compatibles avec une position initiale arbitraire du système ? Examiner en particulier le cas où cette position initiale serait une position d'équilibre.

3° On supposera dans tout ce qui va suivre que le plan perpendiculaire à Δ mené par le centre de gravité G est un plan de section circulaire pour l'ellipsoïde d'inertie relatif au point G. Étudier et discuter les mouvements du système .

4 Est-il possible que le système admette un pendule simple *synchrone*, c'est-à-dire que les fonctions du temps qui donnent l'angle θ dans les différents mouvements du système soient les mêmes que celles qui donnent l'angle d'écart avec la verticale d'un certain pendule simple ? Énoncer, autant que possible sous une forme géométrique, les conditions d'existence d'un pendule simple synchrone et trouver la longueur de ce pendule.

Le corps (S) étant donné, montrer qu'il est toujours possible, et de plusieurs manières, de choisir la position de la droite Δ par rapport à ce corps, de sorte que le système ainsi déterminé admette un pendule simple synchrone. Effectuer les calculs pour une plaque rectangulaire homogène de dimensions $2a$ et $2b$ $(a > b)$.

5° On suppose que le système admette un pendule simple synchrone et l'on applique au corps (S), supposé au repos dans une position d'équilibre, une percussion dont la ligne d'action rencontre la verticale du point G. Montrer que l'angle aigu que font entre elles les deux positions de la droite Δ à deux instants quelconques du mouvement produit ne peut dépasser 1 radian. Cette limite peut-elle être atteinte et pour quelle forme du corps (S) ?

La propriété énoncée s'étend-elle au cas où le système n'admet pas de pendule simple synchrone ?

6° Le système, admettant un pendule simple synchrone, est supposé en mouvement. A un moment donné on lui applique une certaine percussion horizontale. A quelle condition doit satisfaire la ligne d'action de cette percussion pour que les deux mouvements du système, l'un antérieur, l'autre postérieur à la percussion, correspondent au même mouvement du pendule simple synchrone ?

N. B. — On prendra l'équation de l'ellipsoïde d'inertie relatif au point G sous la forme

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Ezx - 2Fxy = 1.$$

CHARLES-ANGE LAISANT.
(1841-1920.)

Charles-Ange Laisant naquit à la Basse-Indre (Loire-Inférieure) le 1er novembre 1841. Sorti de l'École Polytechnique en 1861, il fut pendant plusieurs années officier du génie et sa belle conduite en 1870 lui valut la croix de la Légion d'honneur. Mais son goût n'était pas de suivre jusqu'au bout la carrière militaire. La politique, d'une part, et la science, de l'autre, l'attiraient. Aux élections de 1876, il était nommé député de la Loire-Inférieure et, l'année suivante, se faisait recevoir docteur ès sciences mathématiques, ce dont les annales de la Chambre offrent sans doute peu d'exemples, par une thèse *Sur les applications mécaniques du calcul des quaternions*.

Ce n'est pas ici le lieu d'étudier le rôle politique de Laisant. Sa nature ne le portait rien moins qu'à la neutralité et à l'effacement, et il ne cessa d'appartenir aux partis avancés, de plus en plus avancés à mesure que l'opinion moyenne avançait elle-même. Il se fit redouter par la parole et par la plume. Exposer en termes modérés des idées dont le propre fut généralement de ne pas l'être serait difficile et inapproprié. Les *Nouvelles Annales* n'ont pas à déplorer les erreurs des gouvernements et à flétrir les abus du pouvoir. Ce qu'il faut du moins proclamer, c'est que la fougue de Laisant fut toujours généreuse et désintéressée. Nul, parmi ses adversaires, n'eût songé à lui reprocher une basse intrigue ou un calcul personnel.

Laisant, dont le mandat avait été renouvelé cinq fois,

ne se représenta pas aux élections de 1893 et abandonna la politique pour se consacrer définitivement à la Science. Ses dix-huit années de lutte ne lui avaient pas laissé de bons souvenirs et il n'en parlait guère qu'avec désenchantement. Il exerça les fonctions de répétiteur de mécanique et d'examinateur d'admission à l'École Polytechnique, avec une conscience dont on a gardé la mémoire. Sa courtoisie et sa bienveillance à l'égard des candidats n'étaient pas moindres : il semblait toujours se rappeler que lui aussi, jadis, il avait subi des examens.

Dans ses travaux, Laisant a moins cherché à enrichir la Science de découvertes qu'à répandre les idées qu'il jugeait fécondes. Autrement dit, dans ce domaine comme dans celui de la sociologie, il a fait œuvre de propagandiste. Par sa thèse, il avait eu le grand mérite d'être à peu près le premier à faire pénétrer en France les méthodes vectorielles. Son *Traité des équipollences*, qui en est la suite, est consacré au développement des idées de Bellavitis. On sait que le calcul vectoriel n'a malheureusement pas encore dans notre enseignement la place qui lui est due. Le jour où il l'aura conquise, il ne sera que juste de rendre à Laisant une grande part de ce succès un peu tardif.

Il a fait beaucoup aussi pour une œuvre de portée moindre, mais non pas sans intérêt, la vulgarisation des fonctions hyperboliques. Si tout le monde écrit aujourd'hui $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ l'équation de la chaînette; si les élèves de Spéciales appliquent couramment des changements de variables parallèles à l'évaluation des intégrales $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$, c'est à Laisant qu'on le doit.

Mais c'est dans ses ouvrages philosophiques et péda-

gogiques, *La Mathématique*, *L'Initiation mathématique*, *L'Éducation fondée sur la Science*, que Laisant a exprimé les idées qui lui tenaient le plus à cœur.

« Non seulement la Science est bienfaisante, mais encore c'est de la Science seule que l'humanité peut attendre des bienfaits », telle est la croyance qui domine tous ces ouvrages. Laisant, éloigné de toute foi religieuse, avait foi dans le progrès. Certes, il ne lui échappait pas que si les conquêtes intellectuelles de l'homme, depuis les origines, sont incontestables, son avancement moral reste plus douteux. L'un des progrès les plus éclatants de l'industrie, c'est le perfectionnement des machines à tuer, et la substitution des projectiles asphyxiants aux flèches empoisonnées ne signale pas l'extinction de la férocité primitive. Les ennemis de la Science ont trop beau jeu à nous le faire remarquer.

Mais, si attristée qu'aît été la vieillesse de Laisant par quatre années de massacre scientifique, son espérance et sa confiance n'en furent pas troublées.

« L'homme de nos jours, disait-il volontiers, peut être comparé à un enfant de cinq ou six ans, dont le caractère indique mal ce que sera celui de l'adulte. Il se trouve que cet enfant, ayant entre les mains des jouets dangereux, en fait mauvais usage. Mais la raison assagira peu à peu ses instincts, et le garnement que nous voyons casser les vitres à coups de pierres, qui allume des pétards sous les pas des vieilles dames, sera devenu à trente ans un citoyen laborieux et irréprochable. » C'était la foi des encyclopédistes. Fondée ou non, elle est plus sympathique et plus féconde qu'une doctrine condamnant l'homme à être éternellement partagé entre l'avidité, la sottise et la cruauté.

Laisant a donc apporté ses efforts à hâter l'avènement de la raison, et jugeant que les années les plus importantes, peut-être les seules importantes pour la formation d'un esprit, sont les premières, il a profondément réfléchi à l'éducation des enfants. Les procédés actuels d'enseignement et aussi beaucoup de ce que l'on enseigne excitaient son indignation. Il estimait, par exemple, que si nous avons quelque chose à retenir de la tradition des Romains, c'est que ceux-ci n'apprenaient pas de langues mortes. Supprimer des programmes tout ce dont les encombre la routine, donner aux enfants l'habitude de la réflexion personnelle, le goût de la découverte et de l'invention, faire naître en eux la confiance dans le raisonnement, telle était, selon lui, la grande tâche à accomplir, le véritable devoir de la génération descendante envers la génération montante. « Nos parents, a dit quelqu'un, nous ont été donnés pour nous montrer comment il ne faut pas élever nos fils. » Je pense qu'il eût volontiers pris cette phrase pour épigraphe de ses ouvrages pédagogiques.

C'est probablement l'*Initiation mathématique*, l'un de ses livres les plus originaux, que connaissent le mieux les lecteurs des *Nouvelles Annales*. Laisant veut, on le sait, qu'au lieu d'inculquer dogmatiquement à l'enfant les règles de la numération décimale, l'instructeur lui en fasse découvrir le principe par des jeux appropriés. Il le guide de même dans l'invention de propriétés simples et frappantes des nombres, dans la conception des figures géométriques. Laisant trouva ensuite des collaborateurs pour écrire des *Initiations* à d'autres sciences, et la collection de ces petits livres est fort attrayante.

Son souci pédagogique s'est encore manifesté dans

la création de l'*Enseignement mathématique* (en collaboration avec M. H. Fehr). Dans un autre ordre d'idées, il a fondé (avec E. Lemoine) l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, journal d'un genre tout nouveau auquel s'intéressèrent les savants les plus distingués, ainsi qu'en témoignent les noms illustres qu'on peut relever dans ses pages. Citons aussi son précieux recueil de *Problèmes mathématiques*, en plusieurs volumes. Rappelons enfin qu'en 1896, Laisant prit, avec X. Antomari, la direction des *Nouvelles Annales*, dont il n'a cessé de s'occuper activement jusqu'à sa mort.

C'est pâle, une Notice biographique sur un homme que l'on a beaucoup connu ! On peut donner des dates, rappeler des titres d'ouvrages, résumer certaines idées, mais comment rendre l'accent que prenaient ces idées dans la bouche de celui qui les avait conçues ? Il est difficile de penser d'un ami disparu que « l'œuvre est tout et que l'homme n'est rien ». Et c'était un bon ami ! Laisant le polémiste, Laisant l'ennemi acharné de la tradition, était dans la vie privée la douceur et la bonté même. Lui, qui traitait volontiers de misérables et de fourbes les puissants du jour, ne pouvait refuser sa bienveillance et même sa confiance à l'inconnu qui l'abordait, surtout si cet inconnu venait lui demander un service.... Peut-être ne devrais-je pas introduire ici mon haïssable moi, mais je n'en tiens pas moins à dire qu'il y a vingt-cinq ans, Laisant m'a beaucoup facilité mes débuts scientifiques, et à lui témoigner une reconnaissance dont il avait certainement oublié la cause.

Laisant mourut le 5 mai 1920, après une vieillesse exempte, non d'infirmités, mais de souffrances trop

cruelles. Son intelligence resta lucide jusqu'au bout. Selon son désir, il fut incinéré et rien ne distingue la case qui renferme ses cendres, au *Columbarium* du Père-Lachaise, des cases voisines. Revêtir sa dépouille d'un monument fastueux eût été trahir un homme qui avait toujours méprisé l'apparat et les honneurs et n'estimait ses semblables qu'en raison des services rendus par eux à l'œuvre commune de l'intelligence.

RAOUL BRICARD.

[O'6s]

ÉTUDE DES SURFACES DE TRANSLATION DE SOPHUS LIE

(*Suite*)

PAR M. BERTRAND GAMBIER,
Professeur à la Faculté des Sciences de Rennes.

6. Si la quartique Q admet un point de rebroussement ordinaire et un point double comptant pour deux, c'est-à-dire point de contact de deux branches de courbe, on peut ramener son équation à la forme

$$x^3(y-x)-2\lambda x^2y-y^2=0, \tag{53}$$

l'origine étant le point double comptant pour deux et Ox la tangente en ce point; le point de rebroussement a été renvoyé à l'infini sur Oy, la tangente de rebroussement étant la droite de l'infini. On a immédiatement les expressions rationnelles de x et y en posant

$$y=(\lambda^2-1-t^2)x;$$

on trouve aisément

$$(54)\quad \begin{cases} x = \dfrac{t^2 + 1 - \lambda^2}{t + \lambda}, \qquad y = \dfrac{(t^2 + 1 - \lambda^2)^2}{t - \lambda}, \\ X = \displaystyle\int \frac{dt}{\lambda - 1 - t^2}, \qquad Y = \int dt, \qquad Z = \int \frac{(t + \lambda)\,dt}{(\lambda^2 - 1 - t^2)^2}. \end{cases}$$

Les intégrales X, Y, Z ne sont algébriques que si $\lambda^2 = 1$, auquel cas l'origine, au lieu d'être un point double où deux branches de courbe ont un contact simple, est un point de rebroussement de seconde espèce. Nous conservons donc ce cas en prenant $\lambda = +1$; la quartique Q représentée par les équations paramétriques

$$x = \frac{t^2}{t + 1} \qquad \text{et} \qquad y = -\frac{t^4}{t + 1}$$

est facile à construire; on voit aisément qu'elle peut être coupée par une droite en quatre points réels. Les intégrales deviennent, puisque nous pouvons multiplier chacune par un facteur arbitraire,

$$\frac{2}{t}, \quad \frac{t}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{8}{3t^3} - \frac{4}{t^2}.$$

L'équation aux t des points d'intersection avec la droite $ux - y + w = 0$ est

$$t^4 + ut^2 + wt + w = 0.$$

On en déduit

$$\sum t_i = 0, \qquad \sum \frac{1}{t_i} = -1, \qquad \sum \frac{1}{t_i^2} = 1 - \frac{2u}{w}.$$

En écrivant l'équation sous la forme

$$t + \frac{u}{t} - \frac{w}{t^2} + \frac{w}{t^3} = 0,$$

on en déduit

$$w \sum \frac{1}{t_i^3} + w \sum \frac{1}{t_i^2} - u = 0,$$

et par suite

$$\sum \frac{1}{t_i^3} = \frac{3u}{w} - 1,$$

puis

$$\frac{8}{3}\sum \frac{1}{t_i^3} + 4\sum \frac{1}{t_i^2} = \frac{4}{3}.$$

Je définirai donc la surface S par les équations

$$(55)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{2}{t_1} + \frac{2}{t_2} + 1, \\ y &= \frac{t_1}{2} + \frac{t_2}{2}, \\ z &= \frac{8}{3t_1^3} + \frac{4}{t_1^2} + \frac{8}{3t_2^3} + \frac{4}{t_2^2} - \frac{2}{3}. \end{aligned}\right.$$

Or, on vérifie aisément les relations

$$\begin{aligned} x^3 &= 3z + 3x - \frac{12(x+1)}{t_1 t_2}, \\ x - 1 &= \frac{4y}{t_1 t_2}, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit l'équation de la surface S

$$(56)\qquad x^3 y = 3[x^2 + xy + yz - 1].$$

Cette surface S est du quatrième degré et à centre; elle est le lieu des milieux des cordes de la quartique gauche unicursale [1]

$$(57)\qquad x = \frac{4}{t} + 1, \qquad y = t, \qquad z = \frac{16}{3t^3} + \frac{8}{t^2} - \frac{2}{3}.$$

---

[1] Toute quartique gauche unicursale, ayant un point stationnaire à l'infini, tangente en ce point au plan de l'infini, sans lui être osculatrice, admet pour lieu du milieu de ses cordes la surface la plus générale déduite de la surface (56) dans la transformation homographique employée ici, car cette quartique se ramène elle-même à la forme (57).

Cette quartique et sa symétrique par rapport à l'origine jouissent, par rapport à S, de diverses propriétés déjà signalées comme asymptotiques et séparatrices de certaines régions.

Ici, en remplaçant x, y, z par ix, iy, iz, nous déduisons de S une surface S_1 doublement de translation aussi

$$(58) \qquad x^3 y + 3(x^2 + xy + yz + 1) = 0$$

réelle aussi, car pour $x = \alpha$, nous avons une section hyperbolique dans la surface. Sur S_1, les quatre quartiques de translation sont imaginaires toutes.

Pour terminer la discussion relative au cas où il n'existe que des points doubles, il n'y a plus qu'à envisager le cas où il y a un point double unique où se croisent deux branches de courbe osculatrices. Si l'on suppose ce point à l'origine, et la tangente coïncidant avec Ox, la quartique Q aura une équation

$$(59) \quad (Ax^2 + y)^2 + Bxy(Ax^2 + y) + Cx^2y^2 + Dxy^3 - Ey^4 + Fy^3 = 0.$$

En posant

$$y = x^2(-A + xt),$$

on remplace cette équation par

$$(60) \quad t^2 + Bt(-A + xt) + C(-A + xt)^2 + F(-A + xt)^3 + x[\ldots] = 0;$$

pour $x = 0$, les deux valeurs de t fournies par l'équation

$$(61) \qquad t^2 - ABt + CA^2 - FA^3 = 0$$

doivent être supposées racines simples; à chacune correspond un développement régulier de t suivant les puissances croissantes de x, correspondant à l'une ou

l'autre branche de la quartique passant par l'origine. La fonction y est donc d'ordre infinitésimal égal à 2, x étant l'infiniment petit principal. L'expression

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2(Ax^2 + y) + Bx(Ax^2 + y) - Bxy + 2Cx^2y - 3Dxy^2 + 4Ey^3 + 3Fy^2$$

est d'ordre 3, le coefficient de x^3 étant $2t_0 - AB$; t_0 étant racine de (61), $2t_0 - AB$ n'est pas nul. Dans l'intégrale $\int \frac{y\,dx}{\frac{\partial F}{\partial y}}$ l'élément $\frac{y}{\frac{\partial F}{\partial y}}$ est infiniment grand d'ordre 1 et l'intégrale a une singularité logarithmique.

7. Il ne reste donc qu'à examiner le cas du point triple. Nous le supposons à l'origine; l'équation de la courbe est donc

$$F(x, y) = f_4(x, y) + f_3(x, y) = 0, \tag{62}$$

où f_4 et f_3 sont des polynomes homogènes de degré 4 et 3. Je pose $y = tx$, d'où

$$\left\{\begin{aligned} x &= -\frac{f_3(1, t)}{f_4(1, t)}, \\ F'_x dx + F'_y(t\,dx + x\,dt) &= 0; \end{aligned}\right. \tag{63}$$

la dernière équation peut s'écrire

$$(xF'_x + yF'_y)\,dx + x^2F'_y\,dt = 0.$$

Mais, en vertu de $F(x, y) = 0$, on peut écrire

$$xF'_x + yF'_y = -F'_z = -f_3(x, y) = -x^3 f_3(1, t).$$

On aura donc

$$\frac{dx}{F'_y} = \frac{dt}{x f_3(1, t)} = \frac{-f_4(1, t)\,dt}{f_3^2(1, t)}.$$

Les intégrales X, Y, Z sont donc

$$\int \frac{dt}{f_3(1, t)}, \qquad \int \frac{t\,dt}{f_3(1, t)}, \qquad -\int \frac{f_2(1, t)}{f_3^2(1, t)}\,dt.$$

La première montre que, si le polynome $f_3(1, t)$ n'est pas un cube parfait, chaque facteur simple de $f_3(1, t)$ donne un logarithme; donc $f_3(1, t)$ n'a qu'une racine triple si l'on veut avoir une surface algébrique, autrement dit les trois tangentes au point triple sont confondues; la réciproque est immédiate, car on peut supposer que la tangente unique est Oy, alors

$$f_3(x, y) = x^3, \qquad f_3(1, t) = 0;$$

on a trois polynomes à intégrer. Le résultat est même d'une élégance remarquable : nous obtenons, sans calcul aucun, la surface [1]

$$(64)\quad \left\{\begin{aligned} x &= t_1 - t_2, \\ y &= t_1^2 - t_2^2, \\ z &= A(t_1^4 - t_2^4) \\ &\quad - B(t_1^4 - t_2^4) - C(t_1^3 - t_2^3) - D(t_1^2 - t_2^2) - E(t_1 - t_2). \end{aligned}\right.$$

Il est inutile de donner aucune explication complémentaire; mais, si nous voulons mettre en évidence le second mode de génération de la surface, il suffit de trouver le centre de symétrie, et alors nous reviendrons à la quartique Q dont l'équation a été prise, d'après ce qui précède, sous la forme

$$(65)\qquad 5Ay^4 - 4By^3x - 3Cy^2x^2 - 2Dyx^3 + Ex^4 - x^3 = 0.$$

Le raisonnement de ce paragraphe suppose $A \neq 0$,

---

[1] Cet exemple donne cette fois la surface lieu des milieux des cordes d'une quintique gauche unicursale, admettant un unique point à l'infini, point triple à tangentes confondues, où le plan osculateur est le plan de l'infini.

sinon la quartique se décompose, mais la surface reste surface de translation avec deux modes de génération, en perdant son centre de symétrie toutefois; ceci sera vérifié ultérieurement. Sous la forme (64), la seule hypothèse faite est que l'axe des z soit la génératrice triple du cône directeur des tangentes des courbes génératrices. Donnons l'équation de la surface sous cette forme; c'est un calcul simple de fonctions symétriques que j'omets, t_1 et t_2 étant racines de l'équation

$$T^2 - xT + \frac{x^2 - y}{2} = 0;$$

on trouve ainsi

$$(66) \qquad z = \frac{A}{4}(5xy^2 - x^5) - B\frac{y^2 + 2x^2y - x^4}{2} + C\frac{3xy - x^3}{2} + Dy + Ex.$$

Toute surface de ce type dérive nécessairement de cette surface (66) par un simple déplacement.

Déterminons maintenant la substitution homographique que l'on doit faire sur Q de façon à avoir le type le plus réduit. Cherchons les points d'inflexion de Q : soit

$$ux + vy - w = 0$$

l'équation de la tangente d'inflexion, le t d'un point d'inflexion satisfait aux équations

$$(67) \quad \left\{ \begin{aligned} u + vt + w(5At^4 + 4Bt^3 + 3Ct^2 + 2Dt + E) &= 0, \\ v + w(20At^3 + 12Bt^2 + 6Ct + 2D) &= 0, \\ w(60At^2 + 24Bt + 6C) &= 0. \end{aligned} \right.$$

Il y a deux points d'inflexion : il y a donc trois cas à distinguer, suivant qu'ils sont imaginaires conjugués, réels et distincts, ou confondus. Dans le premier cas, nous supposerons que les droites les réunissant au

point triple soient projetées suivant les directions isotropes et ces points eux-mêmes reportés à l'infini, donc

$$10At^2 - 4Bt + C = (t^2 - 1) \times 10A,$$

d'où

$$B = 0, \qquad C = 10A.$$

Puis $f_4(1, t)$ est nul pour $t = +i$ ou $t = -i$, donc

$$D = 0, \qquad E = 25A.$$

Je peux supposer $A = 1$ en multipliant les cotes de tous les points de la surface par une même constante; je peux aussi retrancher Ex de z, ce qui revient toujours à une transformation homographique. Je conserve donc comme type réduit

$$z = (t_1^2 - t_2^2) + 10(t_1^3 + t_2^3),$$

qui me conduit à l'équation

$$\begin{aligned} 4z &= 5x(y^2 - x^2) + 20(3xy - x^3) \\ &= 5x[(y - 6)^2 - 36] - 20x^3 - x^5. \end{aligned}$$

Si donc je remplace y par $y - 6$, j'aurai le résultat définitif

$$(68) \qquad \begin{cases} x = t_1 + t_2, \\ y = t_1^2 - t_2^2 - 6, \\ z = (t_1^2 + t_2^2) + 10(t_1^3 + t_2^3); \end{cases}$$

$$(69) \qquad 4z = -180x + 5xy^2 - 20x^3 - x^5,$$

et la surface S ainsi obtenue ayant un centre, nous en déduisons immédiatement le second mode de génération. La surface S est lieu des milieux des cordes d'une certaine courbe unicursale du cinquième ordre.

Je change S en ix, iy, iz; j'obtiens une surface S_1

$$(70) \qquad 4z = -180x - 5xy^2 - 20x^3 - x^5$$

à réseaux imaginaires, mais réelle.

En changeant dans (68) t_1, t_2, x, z en it_1, it_2, ix, iz et y en $-y$, nous avons précisément le cas des deux points d'inflexion réels et distincts, d'où la surface S_2 :

$$(71)\qquad \begin{cases} x = t_1 + t_2, \\ y = t_1^2 - t_2^2 + 6, \\ z = t_1^3 + t_2^3 - 10(t_1^3 + t_2^3); \end{cases}$$

$$(72)\qquad 4z = -180x + 5xy^2 - 20x^3 - x^5,$$

et dans S_2 remplaçant x, y, z par ix, iy, iz, nous avons encore une surface S_3 réelle, mais à réseaux de translation imaginaires

$$(73)\qquad 4z = -180x - 5xy^2 - 20x^3 - x^5.$$

Sur S et S_2 nous avons comme précédemment deux courbes enveloppes des génératrices, asymptotiques particulières, et séparatrices de diverses régions où le nombre des génératrices réelles qui s'y croisent est 0, 2 ou 4.

Enfin, si les deux points d'inflexion de Q sont confondus en un seul, nous supposerons ce point à l'infini sur Ox : $B = C = E = 0$, la tangente d'inflexion étant la droite de l'infini, d'où $D = 0$, d'où les équations

$$(74)\qquad \begin{cases} x = t_1 - t^2, \\ y = t_1^2 - t_2^2, \\ z = t_1^3 - t_2^3, \\ 4z = 5xy^2 - x^5. \end{cases}$$

Comme dans ce qui précède, nous adjoindrons à cette surface Σ la surface Σ_1

$$(75)\qquad 4z - 5xy^2 + x^5 = 0$$

engendrée par des réseaux imaginaires; ici il n'y a que deux surfaces au lieu de quatre, car le changement de x et z en ix et iz laisse la surface invariante. Ce fait

est lié à cette propriété que, contrairement aux exemples précédents, sur les quatre courbes de translation qui passent par un point réel de Σ, il y en a toujours deux au moins qui sont imaginaires. Car les équations des deux systèmes de génération sont pour Σ

$$(76)\qquad \begin{cases} x = t_1 + t_2 + t_3 + t_4, \\ y = t_1^2 + t_2^2 = - t_3^2 - t_4^2, \\ z = t_1^3 + t_2^3 = - t_3^3 - t_4^3. \end{cases}$$

Le plan $y = 0$ est plan de symétrie pour Σ; si y est positif, t_3 et t_4 sont sûrement imaginaires; si y est négatif, t_1 et t_2 le sont sûrement. Si nous prenons la moitié de Σ où y est positif, il faudra encore que l'on ait $y > \frac{x^2}{2}$ pour que t_1 et t_2 soient réels; la séparatrice est sur la surface la courbe $x = 2t$, $y = 2t^2$, $z = 2t^3$, qui comme précédemment est enveloppe des courbes t_1 ou t_2 et en même temps asymptotique; la surface Σ est le lieu des milieux de cette courbe du cinquième ordre ou de la courbe symétrique par rapport à l'origine. Tous les réseaux tracés sur Σ_1 sont imaginaires.

8. Nous allons étudier le cas de la quartique Q décomposée en une droite et une cubique. Écrivons l'équation de Q sous la forme

$$(ux + vy + w)\, f(x, y) = 0,$$

où f est du troisième degré en x et y; le long de la droite, nous avons à faire trois intégrations

$$\int \frac{dx}{f(x, y)}, \qquad \int \frac{x\,dx}{f(x, y)}, \qquad \int \frac{y\,dx}{f(x, y)}$$

portant sur une fraction rationnelle de x dont les pôles correspondent aux racines des deux équations

$$f(x, y) = 0, \qquad ux + vy + w = 0.$$

Donc ces intégrales ne peuvent être algébriques que si les trois points d'intersection de la droite et de la cubique sont confondus; la droite doit être ou tangente d'inflexion ou tangente de rebroussement; ce dernier cas exige que la cubique soit unicursale et admette un point double, nous verrons que la réciproque est vraie; dans le premier cas, la cubique peut être de genre 1 ou 0 et, si la droite est tangente d'inflexion, comme les fractions à intégrer n'ont chacune qu'un pôle triple, la somme des résidus étant nulle, le résidu unique est nul, donc les courbes planes dont la translation engendre la surface sont algébriques; mais, pour que les courbes associées soient elles-mêmes algébriques, c'est-à-dire pour que la surface elle-même le soit, il est nécessaire (et d'ailleurs suffisant) que la cubique soit unicursale avec rebroussement. En effet, le long de la cubique nous avons à effectuer les intégrations

$$Z = \int \frac{dx}{(ux + vy + w)\frac{\partial f}{\partial y}}, \qquad X = \int \frac{x\,dx}{(ux + vy + w)\frac{\partial f}{\partial y}},$$

$$Y = \int \frac{y\,dx}{(ux + vy + w)\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Or, si la cubique est de genre 1, l'expression

$$uX + vY + wZ$$

se réduit à $\int \frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y}}$ qui est l'intégrale unique de première espèce de la courbe, fonction essentiellement transcendante, donc la courbe X, Y, Z est transcendante. Si la cubique est de genre zéro, et si le point double n'est pas de rebroussement, chacune des deux valeurs distinctes du paramètre t donnant le point

double donne un pôle simple dans les fractions à intégrer, donc la courbe est transcendante; il ne reste donc que le cas du rebroussement, qui réussit, en associant à la cubique soit sa tangente de rebroussement, soit son unique tangente d'inflexion.

Soit d'abord la tangente de rebroussement; je peux, par transformation réelle, réduire Q à la forme

$$x(x^2 - y^3) = 0. \tag{77}$$

Je prendrai sur la cubique $x = \frac{1}{t^3}$, $y = \frac{1}{t^2}$; les intégrales X, Y, Z se réduisent à $\int dt$, $\int t\,dt$, $\int t^3\,dt$. Sur la droite, je remplace $\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial y}}$ par $\frac{-dy}{\frac{\partial F}{\partial x}}$ ou $\frac{dy}{y^3}$. Les intégrales X, Y, Z se réduisent à 0, $\int \frac{dy}{y^2}$, $\int \frac{dy}{y^3}$. Je pourrai donc écrire, en remplaçant sur la tangente y par $\frac{1}{t_4}$,

$$\left\{\begin{aligned} x &= t_1 + t_2 = -t_3, \\ y &= t_1^2 + t_2^2 = -t_3^2 + 2t_4, \\ z &= t_1^4 + t_2^4 = -t_3^4 + 2t_4^2. \end{aligned}\right. \tag{78}$$

L'équation de la surface résulte de calculs déjà faits :

$$2z = y^2 + 2x^2y - x^4. \tag{79}$$

Les deux courbes t_3, t_4 qui passent par un point réel sont toujours réelles, mais les courbes t_1, t_2 ne le sont que si $2y > x^2$; la séparatrice sur la surface est la courbe $x = 2t$, $y = 2t^2$, $z = 2t^4$ qui jouit de propriétés déjà signalées. Ici la surface [1] a perdu la propriété d'admettre un centre; elle a un plan de symétrie, le plan yOz.

---

[1] Cet exemple donne cette fois la surface-lieu des milieux des cordes de la quartique gauche unicursale admettant à l'infini un point stationnaire où le plan osculateur est le plan de l'infini.

Voyons enfin le cas de la cubique unicursale à rebroussement jointe à sa tangente inflexionnelle. Je prends

$$F(x, y) = y(y - x^3).$$

On trouve aisément

$$(80)\quad \begin{cases} x = t_1 + t_2 = -t_3 + t_4, \\ y = t_1^2 + t_2^2 = -t_3^2 + t_4^2, \\ z = \dfrac{1}{t_1} + \dfrac{1}{t_2} = -\dfrac{1}{t_3}, \end{cases}$$

puisque t_1 et t_2 sont racines de $T^2 - xT + \frac{x^2 - y}{2} = 0$, on a évidemment

$$z = \frac{2x}{x^2 - y}$$

ou

$$(81)\quad z(x^2 - y) - 2x = 0.$$

Cette surface est lieu des milieux des cordes de la cubique $x = 2t$, $y = 2t^2$, $z = \frac{2}{t}$, tangente au plan de l'infini.

9. Le dernier cas à examiner est celui où Q se décompose en deux coniques; le cas où toutes les coniques du faisceau se réduisent à deux droites a été élucidé : on a le paraboloïde elliptique ou hyperbolique. Ce cas écarté, on sait qu'on peut se borner au cas de deux coniques proprement dites; on a affaire à des intégrales curvilignes effectuées le long de l'une ou l'autre, donc finalement à des intégrales de fractions rationnelles dont les pôles correspondent aux points d'intersection; si les deux coniques ne sont pas soit bitangentes, soit surosculatrices, il y a au moins un point simple dans l'intersection, donc les surfaces sont transcendantes. Le cas du double contact a été étudié complètement et a donné des surfaces transcen-

dantes. Il ne reste donc que le cas de la surosculation.

Je traite ce cas en prenant pour coniques A et B deux paraboles égales ayant même axe :

$$A \equiv x^2 - 2py, \qquad B \equiv x^2 - 2py - a.$$

On constate sans peine que les intégrales sont $\int dx$, $\int x\,dx$, $\int y\,dx$ sur l'une d'elles, et $-\int dx$, $-\int x\,dx$, $-\int y\,dx$ sur l'autre. J'écris les équations paramétriques

$$(82) \qquad \begin{cases} x = t_1 + t_2 = t_3 + t_4, \\ y = t_1^2 + t_2^2 = t_3^2 + t_4^2 - 2a, \\ z = t_1^3 + t_2^3 = t_3^3 + t_4^3 - 3a(t_3 + t_4), \end{cases}$$

donnant la surface algébrique du troisième ordre

$$(83) \qquad 2z + x^3 - 3xy = 0$$

déjà rencontrée plus haut, tout au moins provisoirement. Cette surface est réglée, lieu des milieux des cordes de la cubique $x = 2t$, $y = 2t^2$, $z = 2t^3$ osculatrice au plan de l'infini. Sur toute surface réglée du troisième ordre, il y a deux droites exceptionnelles, rencontrées par toutes les génératrices courantes. Ici nous sommes dans le cas où ces deux droites sont confondues; c'est la droite à l'infini du plan yOz. Cette forme (83) constitue une forme canonique intéressante pour les surfaces réglées du troisième ordre dont les deux directrices rectilignes exceptionnelles sont confondues; c'est la surface connue sous le nom de *surface de Cayley*.

Le calcul précédent nous donne, sans calculs, les asymptotiques non rectilignes : ce sont les cubiques gauches représentées par les équations

$$(84) \qquad x = 2t, \qquad y = 2(t^2 - a), \qquad z = 2(t^3 - 3at).$$

cubiques dont le lieu des milieux des cordes est la surface étudiée.

Remarquons que, pour toutes les surfaces qui admettent une infinité de modes de génération comme surfaces de translation, cette même remarque donne *une* famille de lignes asymptotiques, sans aucune intégration.

Pour la surface réglée du troisième degré que nous venons d'étudier, la théorie des complexes et congruences linéaires donne, elle aussi, une voie détournée pour arriver aux asymptotiques. Enfin, nous déduisons des équations (82) des équations propres à définir une surface qui n'a que deux modes de translation, à savoir :

$$(85)\quad \begin{cases} x = t_1 - t_3 & = t_4 - t_2, \\ y = t_1^2 - t_3^2 + a & = t_4^2 - t_2^2 - a, \\ z = t_1^3 - t_3^3 + \dfrac{3a}{2}(t_1 + t_3) & = t_4^3 - t_2^3 - \dfrac{3a}{2}(t_2 + t_4). \end{cases}$$

Un calcul facile conduit à l'équation

$$(86)\qquad x^4 + 3y^2 - 4xz - 3a^2 = 0.$$

On doit supposer a différent de zéro, car pour $a = 0$ on voit immédiatement que les deux modes de génération n'en font qu'un. On peut supposer a positif, puisque l'équation (86) ne contient que a^2; alors, en remplaçant x par $x\sqrt{a}$, y par ay et z par $az\sqrt{a}$, le paramètre a disparaît ou plutôt est remplacé par l'unité. Nous avons ainsi une surface du quatrième ordre à centre, sur laquelle les quatre courbes t_1, t_2, t_3, t_4 qui passent par un point sont toujours réelles.

En changeant x, y, z en ix, iy, iz nous obtenons une nouvelle surface réelle à réseaux tous imaginaires

$$(87)\qquad x^4 - 3y^2 + 4xz - 3 = 0.$$

Enfin, le changement de a en ia nous conduit à deux

nouvelles surfaces, à réseaux tous imaginaires, mais toujours réelles :

$$(88)\qquad \begin{cases} x^4 + 3y^2 - 4xz + 3 = 0, \\ x^4 - 3y^2 + 4xz - 3 = 0. \end{cases}$$

Ce cas correspond à une quartique Q décomposée en deux paraboles surosculatrices, imaginaires conjuguées :

$$x_1^2 - 2py - bi = 0 \qquad \text{et} \qquad x^2 - 2py + bi = 0.$$

Nous avons ainsi épuisé tous les cas de surfaces algébriques, dans l'espace ordinaire, et indiqué tous les types canoniques auxquels elles peuvent être réduites par une transformation *réelle*. Je récapitule ces types :

$$\begin{array}{ll}
(\mathrm{I}) & z(x^2+y^2) - (x+z) = 0, \\
(\mathrm{II}) & z(x^2+y^2) + x - z = 0, \\
(\mathrm{III}) & xyz - x - y + z = 0, \\
(\mathrm{IV}) & xyz - (x + y + z) = 0, \\
(\mathrm{V}) & x^3y - 3(x^2 + xy + yz) + 3 = 0, \\
(\mathrm{VI}) & x^3y + 3(x^2 + xy + yz) - 3 = 0, \\
(\mathrm{VII}) & 4z + 180x - 5xy^2 + 20x^3 + x^5 = 0, \\
(\mathrm{VIII}) & 4z + 180x + 5xy^2 - 20x^3 + x^5 = 0, \\
(\mathrm{IX}) & 4z + 180x - 5xy^2 - 20x^3 - x^5 = 0, \\
(\mathrm{X}) & 4z + 180x + 5xy^2 + 20x^3 - x^5 = 0, \\
(\mathrm{XI}) & 4z - 5xy^2 + x^5 = 0, \\
(\mathrm{XII}) & 4z + 5xy^2 + x^5 = 0, \\
(\mathrm{XIII}) & 2z - y^2 - 2x^2y + x^4 = 0, \\
(\mathrm{XIV}) & z(x^2 - y) - 2x = 0, \\
(\mathrm{XV}) & 2z + x^3 - 3xy = 0, \\
(\mathrm{XVI}) & x^4 + 3y^2 - 4xz - 3 = 0, \\
(\mathrm{XVII}) & x^4 - 3y^2 + 4xz - 3 = 0, \\
(\mathrm{XVIII}) & x^4 + 3y^2 - 4xz + 3 = 0, \\
(\mathrm{XIX}) & x^4 - 3y^2 + 4xz + 3 = 0, \\
(\mathrm{XX}) & 2z = x^2 + y^2, \\
(\mathrm{XXI}) & 2z = x^2 - y^2.
\end{array}$$

Dans ces 21 types, la substitution

$$(89)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= a\,x_1 + b\,y_1 + c\,z_1 + d,\\ y &= a'x_1 + b'y_1 + c'z_1 + d',\\ z &= a''x_1 + b''y_1 + c''z_1 + d'', \end{aligned}\right.$$

où les lettres $a, b, \ldots, d''$ sont des constantes réelles arbitraires, donne les surfaces les plus générales.

Si l'on admet des substitutions à coefficients imaginaires, le nombre des types canoniques s'abaisse, on obtient seulement 9 types, par exemple :

$$(90)\qquad \left\{\begin{aligned} xyz + x + y + z &= 0,\\ x^4y - 3(x^2 + xy + yz) + 3 &= 0,\\ 4z + 180x - (5x)^2 + 20x^3 + x^5 &= 0,\\ 4z - (5x)^2 + x^5 &= 0,\\ 2z - y^2 - 2x^2y + x^4 &= 0,\\ z(x^2 - y) - 2x &= 0,\\ 2z + x^3 - 3xy &= 0,\\ x^4 + 3y^2 - 4xz - 3 &= 0,\\ 2z &= x^2 + y^2. \end{aligned}\right.$$

Il est intéressant de remarquer que les sept premiers types du Tableau (90) sont les surfaces canoniques auxquelles on peut réduire la surface lieu du milieu des cordes de la cubique gauche générale, ou de la quartique ou de la quintique unicursales précisées plus haut.

10. Les surfaces transcendantes qui admettent plusieurs générations comme surfaces de translation possèdent des propriétés importantes.

Je vais traiter un cas particulier, celui qui donne des surfaces minima. Une telle surface possède déjà un mode de génération, par des courbes minima associées, dont le cône directeur des tangentes est le cône iso-

trope ; donc si la surface admet un second mode de génération, on sera dans le cas où non seulement la quartique Q se décompose en deux coniques, mais encore où la surface admet une infinité de générations. Si l'on se reporte aux explications du paragraphe 1, chacun de ces modes est fourni par des courbes dont le cône directeur des tangentes est du second degré ; tous ces cônes engendrent un faisceau ponctuel dont l'un des cônes de base est le cône isotrope. Tous ces cônes ont donc les mêmes axes de symétrie et, en les prenant pour axes de coordonnées, puis coupant par le plan $z = 1$, nous avons des coniques sous forme réduite et le calcul est presque immédiat.

Quelques explications sont nécessaires pour la discussion de réalité : sans particulariser les axes, supposons que l'un des cônes directeurs ait pour équation

$$(91)\quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0.$$

Au paragraphe 2, j'ai expliqué qu'on peut définir la surface au moyen de deux cônes *quelconques* du faisceau. Il s'agit de montrer que, si la surface est réelle, on peut se borner à un cône réel (tout au moins d'équation à coefficients réels) et au cône isotrope. En effet, si la surface est réelle et si le cône (91) n'est pas d'équation réelle, l'équation imaginaire conjuguée

$$(92)\quad A_1x^2 + A'_1y^2 + A''_1z^2 + 2B_1yz + 2B'_1zx + 2B''_1xy = 0$$

représente un cône qui, associé au cône isotrope, doit conduire à la surface conjuguée, donc à la surface primitive, qui est supposée réelle. Donc le faisceau (91) et (92) contient le cône isotrope : on aura donc

$$(93)\quad \left\{\begin{array}{lll} A_1 = \lambda A + \mu, & A'_1 = \lambda A' + \mu, & A''_1 = \lambda A'' + \mu, \\ B_1 = \lambda B, & B'_1 = \lambda B', & B''_1 = \lambda B''; \end{array}\right.$$

je peux supposer les axes pris de sorte que B, B′, B″ ne soient pas nuls; autrement dit, j'évite provisoirement de choisir les axes de symétrie du cône (91); alors, d'après (93), λ est une imaginaire de module égal à 1, soit $e^{i\varphi}$. Je puis donc écrire $B_1 e^{-\frac{i\varphi}{2}} = Be^{\frac{i\varphi}{2}}$ et, en multipliant le premier membre de (91) par $e^{\frac{i\varphi}{2}}$, je puis supposer $\lambda = 1$, c'est-à-dire B, B′, B″ réels. Les relations

$$A_1 - A = A'_1 - A' = A''_1 - A'' = \mu$$

montrent que A, A′, A″ ont même partie imaginaire, soit ia; si donc je retranche $ia(x^2 + y^2 + z^2)$ du premier membre de (91), je remplace le cône par un autre du faisceau et ce nouveau cône a une équation à coefficients réels.

A partir de ce moment, j'ai le droit de prendre pour axes de coordonnées les axes de symétrie du cône considéré; si nous supposons d'abord ce cône non de révolution, les trois axes sont uniques, réels et l'équation (91) se réduit à

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 = 0$$

avec $A \neq A' \neq A''$; je supposerai le nom des axes choisis de sorte que le coefficient moyen, quand on range A, A′, A″ par ordre de grandeur soit A″. Alors le cône particulier

$$(94) \qquad (A - A'')x^2 + (A' - A'')y^2 = 0$$

se décompose en deux plans réels dont j'écris l'équation sous la forme $y^2 - m^2x^2 = 0$, où m est réel. Je prends donc pour équation de la quartique Q

$$(95) \qquad (y^2 - m^2x^2)(x^2 + y^2 + 1) = 0.$$

Sur l'une ou l'autre droite $y = \pm mx$, on a

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y} = y(x^2 + y^2 + 1).$$

Sur la droite $y = mx$, on aura

$$X_1 = \int \frac{dx}{2m(x^2 + y^2 + 1)}, \quad Y_1 = \int \frac{dx}{2(x^2 + y^2 + 1)},$$
$$Z_1 = \int \frac{dx}{2mx(x^2 + y^2 + 1)}.$$

Sur la droite $y = -mx$, on aura

$$X_2 = \int \frac{-dx}{2m(x^2 + y^2 + 1)}, \quad Y_2 = \int \frac{dx}{2(x^2 - y^2 + 1)},$$
$$Z_2 = \int \frac{-dx}{2mx(x^2 - y^2 + 1)}.$$

Je multiplierai, pour plus d'élégance, $X_1, Y_1, \ldots, Z_2$ par $2m$.

Pour X_1, Y_1, Z_1, j'écrirai $x = \rho_1 \cos\alpha$, $y = \rho_1 \sin\alpha$, $m = \tang\alpha$:

$$(95) \quad \left\{ \begin{aligned} X_1 &= \int \frac{d\rho_1 \times \cos\alpha}{\rho_1^2 + 1} = \cos\alpha \times \text{arc tang}\,\rho_1, \\ Y_1 &= \sin\alpha \times \text{arc tang}\,\rho_1, \\ Z_1 &= \int \frac{d\rho_1}{\rho_1(\rho_1^2 - 1)} = L\frac{\rho_1}{\sqrt{\rho_1^2 - 1}}. \end{aligned} \right.$$

J'aurai évidemment

$$(96) \quad \left\{ \begin{aligned} X_2 &= -\cos\alpha \times \text{arc tang}\,\rho_2, \\ Y_2 &= \sin\alpha \times \text{arc tang}\,\rho_2, \\ Z_2 &= -L\frac{\rho_2}{\sqrt{\rho_2^2 + 1}}. \end{aligned} \right.$$

Si je pose $\rho_1 = \tang\varphi_1$, on a $\sin\varphi_1 = \frac{\rho_1}{\sqrt{\rho_1^2 + 1}}$, donc j'ai les formules paramétriques, pour définir la surface minima la plus générale de ce type, sauf homothétie

par rapport à l'origine puis déplacement :

$$(97)\quad \begin{cases} X = \cos\alpha(\varphi_1 - \varphi_2), \\ Y = \sin\alpha(\varphi_1 + \varphi_2), \\ Z = L\dfrac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2}. \end{cases}$$

En multipliant dans les formules (97) X, Y, Z par h, on a une surface répondant aussi à la question; la surface ne peut être réelle que si h est réelle : car d'après le paragraphe 1, la trace sur le plan $z = 1$ du plan mené de l'origine parallèlement au plan tangent au point (φ_1, φ_2) coupe la droite $y = mx$ au point

$$x = \cos\alpha \operatorname{tang}\varphi_1, \qquad y = \sin\alpha \operatorname{tang}\varphi_1;$$

or si le point (φ_1, φ_2) de la surface est réel, le plan tangent est réel, donc φ_1 est réel; de même φ_2; donc si la surface est réelle, h est réel.

Les formules (97) donnent la génération particulière par courbes planes réelles; si l'on met en évidence, par des calculs simples que j'omets, les autres systèmes de courbes de translation, la surface sera définie comme lieu des milieux des cordes d'une série de courbes gauches à un paramètre, qui sont précisément une des deux familles d'asymptotiques. L'élimination de φ_1 et φ_2 est facile et donne, en remplaçant $\frac{X}{2}$, $\frac{Y}{2}$, $\frac{Z}{2}$ par $\frac{X}{h}$, $\frac{Y}{h}$, $\frac{Z}{h}$, l'équation

$$(98)\qquad \operatorname{th}\left(\frac{Z}{h}\right) = \frac{\operatorname{tang}\left(\dfrac{X}{h\cos\alpha}\right)}{\operatorname{tang}\left(\dfrac{Y}{h\sin\alpha}\right)}.$$

Dans cette équation on peut, si l'on veut, remplacer $\frac{Y}{h\sin\alpha}$ par $\frac{\pi}{2} - \frac{Y}{h\sin\alpha}$ et l'on a la forme équiva-

lente

$$(99) \qquad \operatorname{th}\frac{Z}{h} = \operatorname{tang}\left(\frac{X}{h\cos\alpha}\right)\operatorname{tang}\left(\frac{Y}{h\sin\alpha}\right)$$

indiquée page 363, tome I, 2e édition de la *Théorie des Surfaces* de M. Darboux.

La surface (98) contient un paramètre de *forme* α et un paramètre de *grandeur* h; dans le cas où $\alpha = \frac{\pi}{2}$, il sera plus simple de garder les formules (97) et de remarquer que $\varphi_1 = \frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ et $\varphi_2 = \frac{Y-X}{\sqrt{2}}$ sont les coordonnées rectangulaires nouvelles quand on prend pour nouveaux axes dans le plan horizontal les bissectrices des anciens, de sorte qu'avec ces nouveaux axes on pourra écrire l'équation de cette surface particulière sous la forme élégante, signalée par Scherk,

$$(100) \qquad e^z = \frac{\sin x}{\sin y},$$

de sorte que l'on peut, si l'on revient à l'état d'esprit initial de cette étude, en négligeant une transformation homographique telle que (89), adopter cette forme (100) comme type canonique des surfaces de Lie correspondant à deux coniques admettant quatre points d'intersection distincts, mais tous imaginaires.

Dans le cas où, ne cherchant plus en particulier les surfaces minima, on désire avoir des coniques à points d'intersection tous réels et distincts, il n'y a qu'à revenir aux deux coniques

$$x^2 + y^2 + 1 = 0, \qquad y^2 - m^2x^2 = 0$$

et à remplacer x et y par ix et iy. La surface (100) est remplacée alors par la surface

$$(101) \qquad e^z = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} y},$$

équation qui peut s'écrire

$$e^{x+y+z} + e^{x+z-y} - e^{2x} = 1,$$

de sorte que l'on arrive, en tenant compte de tous les cas de réalité possible, aux trois types canoniques de forme si élégante

$$(102) \qquad \begin{cases} e^x + e^y + e^z = 1, \\ e^x + e^y - e^z = 1, \\ e^x - e^y - e^z = 1, \end{cases}$$

dont le premier est signalé par M. Darboux (*loc. cit.*); Sophus Lie indique diverses propriétés de ces surfaces et de celles obtenues simultanément

$$Ae^{y+z} + Be^{z+x} + Ce^{x+y} + Le^x + Me^y + Ne^z = 0,$$

en conservant celles qui n'ont que *deux* modes de génération.

Quand la quartique Q se décompose en deux coniques bitangentes, on obtient comme surface minima l'hélicoïde minimum déterminé directement comme exemple au n° 4.

11. J'indique enfin un type simple de surface algébrique dans l'espace à $n+1$ dimensions ($n > 2$) admettant un double mode de génération comme surface de translation.

Je considère l'équation algébrique

$$(103) \qquad \begin{aligned} &(2n+1)A_0 t^{2n} \\ &\quad + 2nA_1 t^{2n-1} + \ldots + (n+1)A_n t^n \\ &\quad + \lambda_1 t^{n-1} + \lambda_2 t^{n-2} + \ldots + \lambda_n = 0, \end{aligned}$$

où $A_0, A_1, \ldots, A_n$ sont $\underline{n+1}$ constantes fixes et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des variables indépendantes en nombre n. Les racines $t_1, t_2, \ldots, t_{2n}$ de l'équation (103) sont

fonctions des λ; je désigne par S_p la somme des produits p à p des t_i et $\sum_p$ la somme $\sum_1^{2n} t_i^p$; nous remarquerons que $S_1, S_2, \ldots, S_n$ sont indépendantes des λ, par suite aussi $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$, d'après les formules bien connues de la théorie des fonctions symétriques.

Considérons maintenant l'expression

$$(104) \qquad U = A_0 \Sigma_{2n+1} - A_1 \Sigma_{2n} - \ldots - A_n \Sigma_{n+1}.$$

On verrait assez aisément qu'elle s'exprime uniquement au moyen de $A_0, A_1, \ldots, A_n$ quand on lui applique les formules rappelées à l'instant. Mais, sans calculer exactement cette expression U, vérifions que $dU = 0$. On a manifestement

$$dU = \sum \frac{\partial U}{\partial t_i} dt_i.$$

$$\frac{\partial U}{\partial t_i} = (2n+1) A_0 t_i^{2n} - 2n A_1 t_i^{2n-1} - \ldots - (n+1) A_n t_i^n$$
$$= -(\lambda_1 t_i^{n-1} - \lambda_2 t_i^{n-2} - \ldots - \lambda_n);$$

où

$$-dU = \lambda_1 \Sigma t_i^{n-1} dt_i - \lambda_2 \Sigma t_i^{n-2} dt_i - \ldots - \lambda_n \Sigma dt_i.$$

Or la constance de $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ permet d'écrire

$$\Sigma dt_i = 0, \quad \Sigma t_i dt_i = 0, \quad \ldots, \quad \Sigma t_i^{n-1} dt_i = 0;$$

donc on a bien $dU = 0$ et U est une constante. Si donc on pose

$$(105) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = t_1 + t_2 + \ldots + t_n, \\ x_2 = t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_n^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ x_n = t_1^n + t_2^n + \ldots + t_n^n, \\ x_{n+1} = A_0 \sum_1^n t_i^{2n+1} + A_1 \sum_1^n t_i^{2n} + \ldots + A_n \sum_1^n t_i^{n+1}; \end{array} \right.$$

la surface ainsi obtenue dans l'espace à $n+1$ dimen-

sions est doublement de translation, quelles que soient les constantes $A_0, A_1, \ldots, A_n$ (le calcul, il est vrai, ne le démontre que si $A_0 \neq 0$). Si l'on suppose $A_0 \neq 0$, le calcul déjà fait montre que, si l'on désigne Σ_i par $2B_i$ et U par $2B_{n+1}$, le point $(B_1, B_2, \ldots, B_n, B_{n+1})$ est centre de symétrie de la surface, qui admet donc un second mode de génération.

Si $A_0 = 0$, la surface cesse d'avoir un centre, mais elle reste du type de Lie. On remarquera même que si A_1 est nul en même temps que A_0, la surface devient réglée; en effet, d'après la théorie des fonctions symétriques appliquée aux n variables $t_1, t_2, \ldots, t_n$, l'expression x_{n+1} s'exprime rationnellement en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et si chacune de ces expressions $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a pour poids son indice, x_{n+1} contiendra, si $A_0 = A_1 = 0$, des termes de poids au plus égal à $2n - 1$, donc ne peut contenir que des termes du premier degré en x_n; en égalant $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ à des constantes arbitraires, on aura les génératrices rectilignes de la surface. Si l'on suppose même

$$A_0 = A_1 = A_2 = \ldots = A_{n-1} = 0,$$

la surface réglée particulière devient tout à fait l'homologue de la surface de Cayley; elle admet cette fois non plus seulement deux modes de génération, mais une infinité à $n - 1$ paramètres. C'est ainsi qu'en se bornant à $n = 3$, la surface définie par les expressions paramétriques

$$(106)\quad \left\{\begin{aligned} x_1 &= t_1 + t_2 + t_3, \\ x_2 &= t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 - \alpha, \\ x_3 &= t_1^3 + t_2^3 + t_3^3 - \frac{3\alpha}{4}(t_1 + t_2 + t_3) - \beta, \\ x_4 &= t_1^4 + t_2^4 + t_3^4 - \alpha(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2) - \frac{4\beta}{3}(t_1 + t_2 + t_3) + \frac{\alpha^2}{2} \end{aligned}\right.$$

décrit une surface, *indépendante des valeurs numériques de* α et β, représentée par l'équation

$$(107) \qquad x_4 = \frac{4}{3} x_1 x_3 - x_2 x_1^2 + \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_1^4}{6}.$$

Cette surface sera donc aussi le lieu du centre de gravité de trois points arbitraires pris sur la courbe unicursale

$$(108) \quad \begin{cases} x_1 = 3t, \qquad x_2 = 3t^2 - \alpha, \qquad x_3 = 3t^3 - \dfrac{9\alpha}{4} t + \beta, \\ \qquad x_4 = 3t^4 - 3\alpha t^2 - 4\beta t + \dfrac{\alpha^2}{2}. \end{cases}$$

Le raisonnement du début associe à cette surface (107) une famille de surfaces à deux paramètres α et β n'ayant cette fois que deux modes de génération.

Nous avons obtenu ainsi des types algébriques intéressants; un type non moins intéressant est constitué par le paraboloïde

$$x_{n+1} = x_1^2 - x_2^2 + \ldots + x_n^2.$$

[M¹8a]

SUR CERTAINES RELATIONS QUI EXISTENT ENTRE L'ÉPICYCLOÏDE ET L'HYPOCYCLOÏDE A TROIS REBROUSSEMENTS;

PAR M. LE CAPITAINE J.-A. MOREN,
A Halifax (Canada).

Une épicycloïde E_3 et une hypocycloïde H_3, toutes deux à trois rebroussements, seront dites *correspon-*

dantes, si elles ont mêmes points de rebroussement.

Une tangente à H_3 sera dite *tangente originale*, relativement à cette courbe, et *corde de contact*, relativement à E_3. On désignera par T son point de contact, par P et P_1 ses deux autres points de rencontre avec H_3, par R et R_1 ses deux points de rencontre (réels) avec E_3. Les points P et P_1 sont les milieux respectifs de TR et de TR_1.

Les relations des deux courbes avec la tangente considérée donnent lieu à diverses propriétés dont les énoncés présentent entre eux une certaine analogie. Nous signalerons les suivantes, en supprimant les démonstrations, pour plus de brièveté :

Hypocycloïde [1].	Epicycloïde.
I. *a*. La longueur du segment PP_1 est constante et égale à celle d'un axe de symétrie de la courbe.	I. *a*. La longueur du segment RR_1 est constante et égale à celle d'un axe de symétrie de la courbe.
b. Le milieu de ce segment a pour lieu le cercle inscrit à H_3.	*b*. Le milieu de ce segment a le même lieu que ci-contre.
II. *a*. Les cordes focales des paraboles osculatrices en P et P_1 coïncident avec la tangente originale. Les foyers	II. *a*. Les cordes focales des paraboles osculatrices de R et R_1 coïncident avec la corde de contact. Les foyers Q_1, Q_2 de

[1] Plusieurs des propriétés énoncées de l'H_3 se trouvent dans les *Nouvelles Annales* : 1870, p. 202, 256 (Painvin), p. 254 (Laguerre), p. 472 (Callandreau); 1875, p. 21 (Cahen); 1913, p. 49 et 113 (J. Lemaire). Quelques-unes de celles qui figurent dans ce dernier article avaient été obtenues indépendamment par l'Auteur, avant qu'il eût connaissance du travail de M. Lemaire.

respectifs de ces paraboles sont R et R_1 [1].

ces paraboles sont les points de cette corde de contact déterminés par les relations

$$\frac{RQ}{PQ} = \frac{R_1Q_1}{P_1Q_1} = \frac{2}{3}.$$

Ces foyers ont pour lieu une courbe qui, comme E_3, est d'ordre 8 et de classe 5.

b. Les axes de ces deux paraboles sont parallèles. La somme des racines carrées de leurs paramètres est constante.

b. Même énoncé que ci-contre.

III. *a*. Les tangentes aux points P et P_1 sont rectangulaires.

III. *a*. Les tangentes aux points R et R_1 sont rectangulaires.

b. La somme des carrés des distances du centre de H_3 à ces deux tangentes est constante.

b. Même énoncé que ci-contre.

c. Ces tangentes se rencontrent sur le cercle inscrit à H_3.

c. Ces tangentes se rencontrent sur le cercle circonscrit à E_3.

d. Les bissectrices de l'angle formé par ces deux tangentes forment un couple de tangentes rectangulaires à une hypocycloïde égale et inversement homothétique à H_3.

d. Du point de rencontre de ces tangentes, on peut encore en mener trois autres à E_3. Deux d'entre elles sont rectangulaires et sont les bissectrices de l'angle formé par la première paire de tangentes.

---

[1] Cette propriété est due à Laguerre (*loc. cit.*), à qui il semble avoir échappé que le lieu du point R est l'E_3 correspondant à H_3.

e. La troisième tangente que l'on peut mener à H_3, par le point de rencontre des deux tangentes considérées, est perpendiculaire à la tangente originale.

f. Cette troisième tangente est parallèle à la troisième normale que l'on peut mener à H_3 par le point de rencontre des normales aux points de contact des tangentes rectangulaires.

g. Si les trois tangentes font les angles respectifs θ_1, θ_2, θ_3 avec un axe de symétrie de H_3, on a la relation

$$\operatorname{tg}\theta_1 + \operatorname{tg}\theta_2 + \operatorname{tg}\theta_3 = \operatorname{tg}\theta_1 \operatorname{tg}\theta_2 \operatorname{tg}\theta_3.$$

IV. *a.* Les normales en P et P_1 sont rectangulaires, et le lieu de leur point de rencontre est le cercle des rebroussements de H_3.

e. La corde de contact de la seconde paire de tangentes rectangulaires est perpendiculaire à la corde de contact originale et se confond avec la troisième tangente à H_3.

f. La cinquième tangente est parallèle à la cinquième normale, que l'on peut mener à E_3 par le point d'intersection commun des normales aux points de contact des deux paires de tangentes rectangulaires.

g. Si les cinq tangentes font les angles respectifs $\theta_1, \ldots, \theta_5$ avec un axe de symétrie de E_3, on a la relation

$$\frac{1}{5}(\operatorname{tg}\theta_1 + \operatorname{tg}\theta_2 + \operatorname{tg}\theta_3 + \operatorname{tg}\theta_4 + \operatorname{tg}\theta_5) = \operatorname{tg}\theta_1 \operatorname{tg}\theta_2 \operatorname{tg}\theta_3 \operatorname{tg}\theta_4 \operatorname{tg}\theta_5.$$

IV. *a.* Les normales en R et R_1 sont rectangulaires, et le lieu de leur point de rencontre est le cercle des rebroussements de E_3.

Ce cercle est le même dans les deux cas. Les normales aux points P, R se coupent sur lui et de même les normales aux points P_1, R_1. La droite qui joint les deux points d'intersection est le diamètre du cercle parallèle à la tangente originale. Les tangentes au cercle en ces deux mêmes points sont les bissectrices des angles formés respectivement par les tangentes en P, R et par les tangentes en P_1, R_1.

b. La parabole qui a pour foyer le point d'intersection des normales en P et P_1, et qui touche les tangentes en ces points, enveloppe H_3.

c. Cette parabole a pour tangente au sommet la tangente originale et pour axe la troisième normale issue du point d'intersection des normales en P et P_1.

b. La parabole qui a pour foyer le point d'intersection des normales en R et R_1, et qui touche les tangentes en ces points, enveloppe H_3.

c. Cette parabole a pour tangente au sommet la corde de contact, et pour axe la troisième normale désignée ci-contre.

d. Ce point d'intersection est aussi le foyer d'une parabole qui touche la seconde paire de tangentes rectangulaires. Cette nouvelle parabole enveloppe H_3, son sommet décrivant cette courbe, et sa tangente au sommet étant la troisième tangente à H_3.

V. *a*. La droite joignant les points d'intersection respectifs des tangentes et des normales en P et P_1 passe par le centre de H_3 et est parallèle aux axes des paraboles osculatrices aux points considérés.

b. Le cercle de diamètre PP_1 enveloppe le cercle tritangent et le cercle des rebroussements, sa corde de contact étant la droite désignée ci-dessus.

c. Cette corde de contact et PP_1 se coupent respectivement en leurs milieux.

V. *a*. Même énoncé que ci-contre, en remplaçant P et P_1 par R et R_1.

b. Idem.

c. Idem.

VI. *a*. La somme des carrés des rayons de courbure en P et P_1 est constante.

VI. *a*. Idem.

b. Le produit des distances à un diamètre quelconque du cercle du point P et du centre de courbure en ce point est égal au produit analogue relatif au point P_1.

b. Idem.

c. La somme des carrés des distances au centre des centres de courbure en P et P_1 est constante et égale à 10 fois le carré du rayon du cercle des rebroussements.

c. La somme des carrés des distances au centre des centres de courbure en R et R_1 est constante et égale à $\frac{34}{25}$ fois le carré du rayon du cercle des rebroussements.

d. L'enveloppe de l'axe radical des cercles de courbure en ces points est une hypocycloïde à trois rebroussements.

d. Même énoncé que ci-contre.

VII. *a*. Le segment d'une tangente à H_3, comprise entre le point de contact et le cercle inscrit, est égal à la corde interceptée sur cette tangente par le cercle.

VII. *a*. Le point de contact d'une tangente à E_3 divise, dans le rapport $\frac{1}{4}$, la corde interceptée sur cette tangente par le cercle circonscrit.

b. La somme des puissances des points de contact de deux tangentes rectangulaires, par rapport au cercle tritangent, est constante.

b. Même énoncé que ci-contre.

c. La somme des puissances des pieds de deux normales rectangulaires, par rapport au cercle des rebroussements, est constante.

c. Idem.

[R9a]

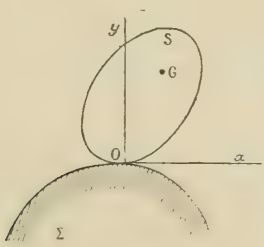
CONSIDÉRATIONS SUR LE FROTTEMENT DE GLISSEMENT;

PAR M. ÉT. DELASSUS.

I. — MOUVEMENT DANS UN PLAN AVEC UN SEUL CONTACT.

Nous avons, dans un plan fixe, une plaque matérielle mobile S en contact ponctuel avec une plaque matérielle fixe Σ (*fig.* 1). Nous prendrons comme origine

Fig. 1.



le point de contact initial O, pour axe Ox la tangente et pour axe Oy la normale du côté libre et nous désignerons par a, b les coordonnées du centre de gravité G, par θ l'angle de rotation de S et enfin par K le rayon de gyration de la plaque en G.

Nous allons nous proposer, en tenant compte du frottement de glissement, de déterminer la nature du mouvement que va prendre S soumise à des forces et à des conditions initiales bien déterminées.

1. Tout mouvement que peut prendre ainsi S en

conservant le contact avec Σ donne naissance à une réaction X, Y issue du point de contact et, pour ce mouvement et à l'instant initial, on aura les équations

$$M a'' = X - \ldots, \qquad M b'' = Y + \ldots.$$
$$M K^2 \theta'' = b X - a Y + \ldots,$$
$$0 = b'' - a\theta'' + \ldots,$$
$$\frac{dV}{dt} = a'' + b\theta'' - \ldots,$$

les termes non écrits ne dépendant que des forces et conditions initiales et V désignant la vitesse de glissement. Par élimination de a'', b'', θ'', on en tire aisément

$$Y = \frac{ab}{K^2 + a^2} X - \beta, \qquad \frac{dV}{dt} = H^2 X + \alpha,$$

H, α, β ne dépendant que des forces et conditions initiales. Il en résulte de suite :

Les réactions initiales de tous les mouvements M *qui ont lieu sous l'action des mêmes forces données et en partant des mêmes conditions initiales se trouvent sur une même parallèle à la droite*

$$(D) \qquad y = \frac{ab}{K^2 + a^2} x$$

et, pour deux quelconques, M *et* M_1, *de ces mouvements, la différence* $\frac{dV}{dt} - \frac{dV_1}{dt}$ *est du signe de* $X - X_1$.

Supposons qu'on parte avec les conditions initiales du roulement, nous pourrons alors considérer le mouvement forcé de roulement M_1 donnant lieu à la réaction $O\omega$, le mouvement M' qui aurait lieu sans frottement donnant la réaction $O\sigma$, et enfin un mouvement

quelconque M avec glissement et frottement de glissement de réaction $O\gamma$.

De la première partie du théorème précédent résulte que γ et σ sont sur la parallèle à D menée par ω et que σ en est son intersection avec Oy.

De la seconde partie résulte, puisque $\frac{dV_1}{dt}$ est nulle, que $\frac{dV}{dt}$ est du signe de $X - X_1$ de sorte que la condition essentielle de possibilité du mouvement M

$$X \frac{dV}{dt} < 0$$

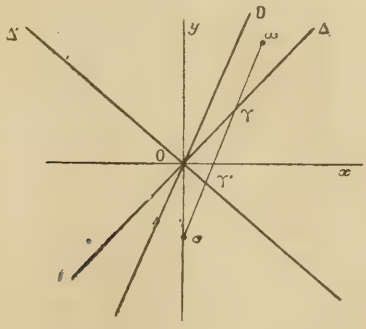
devient

$$X(X - X_1) < 0$$

et exprime que le point γ doit être entre ω et σ.

2. Ce qui précède nous permet de faire géométriquement la discussion générale dans le cas du contact forcé, ce qui donne un double angle de frottement limité par les deux droites indéfinies Δ, Δ' (*fig.* 2).

Fig. 2.



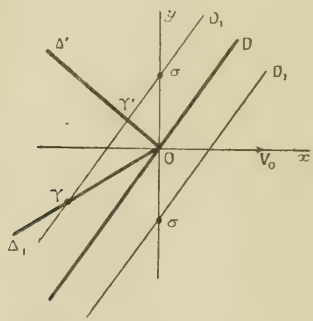
1° $V_0 = 0$. — Nous partons de la réaction ω du roulement forcé et nous distinguons deux cas :

D *ne traverse pas l'angle de frottement* $\Delta\Delta'$. Si ω est dans cet angle, les deux mouvements de glissement M_g, $M_{g'}$ sont impossibles; donc c'est le roulement M_R qui se produit. Si ω est à l'extérieur, le mouvement M_R est impossible ainsi que l'un des deux mouvements M_g, $M_{g'}$, l'autre étant possible, de sorte que c'est lui qui se produit.

D *traverse l'angle de frottement*, par exemple, passe entre Oy et Δ (*fig.* 2); si ω est dans l'angle $D\Delta$ les trois mouvements sont possibles, donc indétermination. Pour ω, dans les autres régions, on trouve un et un seul mouvement.

2° $V_0 \neq 0$. — Ici il n'est plus possible de parler du mouvement M_R, mais nous pouvons faire la discussion en partant de σ. Supposons par exemple V_0 positive, la force de frottement doit être négative. Donc nous ne pouvons accepter que des mouvements de glissement avec réaction γ ou γ' située sur les côtés de l'angle $\Delta'\Delta_1$ (*fig.* 3) et l'on voit immédiatement les résultats suivants :

Fig. 3.



D *ne traverse pas l'angle de frottement, donc traverse l'angle* $\Delta'\Delta_1$; quel que soit σ, la parallèle à D

rencontre un et un seul des deux côtés de cet angle, donc on a un mouvement M_g ou $M_{g'}$ bien déterminé.

D *traverse l'angle de frottement, donc ne traverse pas l'angle* $\Delta'\Delta_1$. Si σ est au-dessus de O, la parallèle à D rencontre les deux côtés de l'angle, donc indétermination et, si σ est au-dessous de O, elle n'en rencontre aucun, donc impossibilité.

Nous retrouvons ainsi les indéterminations et impossibilités de M. Painlevé et nous voyons qu'elles ne peuvent se présenter que dans le cas où la droite D traverse l'angle de frottement.

Ce cas ne se présentera jamais si f est suffisamment petit, parce que le coefficient angulaire de D ne peut devenir infini pour aucune position de S. Il ne se présentera pas non plus si, f étant quelconque, S diffère très peu d'un disque circulaire ayant son centre de gravité au centre de figure, car alors a restant toujours très petit il en est de même du coefficient augulaire de D.

3. Les singularités de M. Painlevé conduisent à considérer les liaisons forcées avec frottement de glissement comme réalisées avec un certain jeu, c'est-à-dire, en réalité, par deux liaisons unilatérales telles que le solide puisse être en contact tantôt avec l'une, tantôt avec l'autre.

On est ainsi amené à étudier le contact unilatéral avec frottement de glissement et nous admettrons les lois suivantes :

1° Dans tout mouvement effectif en suivant le contact, on a $Y > 0$;

2° Dans un mouvement de roulement effectif, on a $|X| < fY$;

3° Dans un mouvement effectif avec glissement, on a $|X| = fY$ et $XV < 0$;

4° Le frottement de glissement ne produisant aucune action d'adhérence, il y a échappement dès que le mouvement libre prolongeant le mouvement considéré est possible, c'est-à-dire est du côté libre de la liaison de contact.

Les trois premières lois, qui sont classiques, montrent que l'on ne doit plus considérer ici que les deux-demi droites Δ, Δ' situées du côté Oy de Ox.

La dernière montre qu'il y a échappement si le point σ est au dessous de Ox, c'est-à-dire si la réaction ω ou γ du mouvement considéré est au-dessous de la droite D.

4. Il est alors facile de reprendre la discussion géométrique précédente en remarquant ici que nous avons un mouvement de plus à considérer : le mouvement libre M_ℓ.

1° $V_0 = 0$. — Nous discutons par rapport au point ω.

Fig. 4.

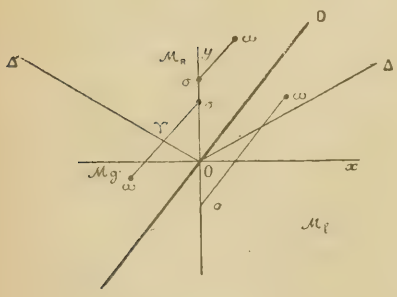
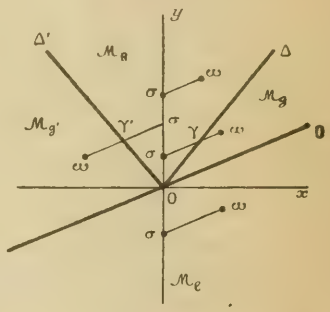


Fig. 5.



Toute la partie du plan au-dessous de D sera la région d'échappement.

Si D ne traverse pas l'angle de frottement il reste trois régions M_R, M_g, $M_{g'}$ (*fig.* 4), tandis que si D traverse cet angle il ne reste que deux régions M_R et $M_{g'}$ (*fig.* 5); mais, dans les deux cas, chaque fois que ω est dans une région il n'y a, comme possible, que le mouvement correspondant à cette région, mouvement qui se produit alors forcément.

2° $V_0 \neq 0$. — Nous partons alors du point σ; s'il est au-dessous de O, il y a échappement. Supposons-le au-dessus. Nous devrons mener par ce point la parallèle à D et prendre son intersection avec la demi-droite Δ' si V_0 est positive ou avec la demi droite Δ si V_0 est négative. Il n'y a donc aucune indétermination possible.

Si l'on est dans le cas de la figure 4, on constate que l'on obtient toujours ainsi un point γ ou γ', donc aucune impossibilité. Si l'on est dans le cas de la figure 5, il y a bien intersection avec Δ', c'est-à-dire solution, si V_0 est positive, mais aucune intersection avec Δ, c'est-à-dire impossibilité, si V_0 est négative.

En résumé, nous trouvons toujours la solution sans impossibilité ni indétermination, sauf dans le cas où la droite D traverse l'angle de frottement et où V_0 non nulle est du côté opposé à la partie supérieure de D. L'impossibilité qui se présente alors correspond-elle, du moins approximativement, à une réalité expérimentale et que se produit-il effectivement quand on est dans de telles conditions initiales?

5. Tous les élèves savent, c'est un amusement auquel ils se sont livrés, que s'ils tiennent entre les doigts et par l'extrémité un morceau de craie un peu long, le trait se tracera normalement sur le tableau noir par mouvement de glissement s'ils font marcher la craie

dans le sens de son inclinaison sur le tableau ou s'ils la font marcher dans le sens inverse de cette inclinaison, celle-ci étant suffisamment petite, et que si, marchant dans ce sens inverse, on donne à la craie une inclinaison suffisamment forte, la craie se met à marcher par bonds traçant, non plus un trait continu de glissement, mais un trait ponctué.

Si l'on analyse ce phénomène expérimental, on voit que le point de contact est brusquement immobilisé, que la craie prend un mouvement de roulement de courte durée se terminant par échappement et que si le mouvement libre ne dure pas c'est que les forces agissantes ramènent au contact, de sorte que les bonds se reproduisent périodiquement.

Si l'on applique la théorie développée précédemment au long morceau de craie assimilé à une tige matérielle inclinée à angle aigu sur Ox, on voit que la droite D est également inclinée à angle aigu sur Ox et ne peut être intérieure à l'angle de frottement que si l'inclinaison de la tige est comprise entre deux limites α_1 et α_2 dépendant de f, mais dont la plus grande est très voisine de $\frac{\pi}{2}$.

Notre impossibilité de tout mouvement de glissement correspond donc bien à une réalité physique, à la production effective d'un mouvement complexe connu, dans les cas particuliers où il se produit dans les machines, sous le nom de *broutement*. La cause en est alors dans la cessation accidentelle du graissage qui fait grandir considérablement l'angle de frottement et arrive à lui faire contenir la droite D ; si l'on refait fonctionner le graissage, l'angle de frottement diminue, arrive à ne plus contenir D et le broutement cesse.

De ces comparaisons nous déduirons le résultat suivant :

Lorsque les conditions initiales donnent le cas d'impossibilité de M_g *et* $M_{g'}$, *il y a choc transformant ces conditions initiales de glissement en conditions de roulement, c'est-à-dire choc par introduction brusque de la liaison de roulement de* S *sur* Σ.

6. Étudions ce qui passe pendant le mouvement.

Supposons qu'on soit dans le roulement ; on a un point ω situé dans la région M_R et le roulement persistera tant qu'il n'en sortira pas. Il peut en sortir de trois façons :

1° En traversant un de ses côtés $\Delta\Delta'$. Il y a alors transformation de M_R en M_g ou $M_{g'}$ correspondant avec raccordement des trajectoires au second ordre car, au passage, le point ω coïncide avec le point γ ou γ' du mouvement de glissement qui se produit et il n'y a aucune discontinuité sur la réaction.

2° En traversant le sommet O. On passe alors dans M_l et il y a transformation de M_R en M_l avec raccordement au second ordre puisque au moment du passage la réaction totale de M_R était nulle.

3° En traversant D supposée à ce moment être à l'intérieur de l'angle de frottement. Là encore on passe dans M_l. Il y a encore transformation de M_R en M_l, mais, cette fois, avec raccordement seulement au premier ordre puisque au moment du passage la réaction totale de M_R n'était pas nulle.

Supposons enfin qu'on soit dans le mouvement de

glissement, M_g par exemple, caractérisé par un point γ situé sur la demi-droite Δ supposée au-dessus de D. Ce mouvement de glissement ne pourra cesser que de trois façons :

1° γ se déplaçant sur Δ en sortira par l'extrémité O. Il y aura transformation de M_g en M_l puisque, Δ étant à ce moment au-dessus de D, on passe au-dessous de cette droite. Il y a d'ailleurs raccordement au second ordre puisque la réaction de M_g est nulle au passage.

2° γ étant toujours sur Δ, la droite D vient traverser Δ pour entrer dans l'intérieur de l'angle de frottement. C'est le cas singulier.

La vitesse de glissement devient brusquement nulle par choc sur la liaison de roulement ; on a un mouvement ultérieur dont les conditions initiales sont celles du roulement et dont on déterminera la nature par le procédé indiqué précédemment.

3° γ étant encore sur Δ et D en dehors de l'angle de frottement, la vitesse V vient à s'annuler. On est alors, mais sans choc, dans les mêmes conditions que dans le cas précédent et l'on procédera de même.

Cette étude de ce qui se passe pendant le mouvement nous indique un échappement du roulement pouvant se produire alors que la réaction normale est encore positive et une transformation brusque de glissement en roulement : Ce sont, comme va nous le montrer encore notre morceau de craie, des réalités physiques qui, il faut l'avouer, sont en contradiction avec la conception par trop mathématique que l'on a généralement du frottement de glissement.

Tenons le morceau de craie très peu incliné sur le tableau et poussons-le, nous avons glissement ; tout en

le faisant glisser ainsi, augmentons son inclinaison, la demi-droite supérieure D, qui se trouve toujours au-dessous de la craie et monte avec elle, va venir rencontrer Δ; à ce moment, par choc, la vitesse du point de contact va s'annuler et il va se produire roulement avec apparition d'une réaction ω située dans l'angle de roulement, donc au-dessus de Δ et par conséquent au-dessus de D confondue avec Δ. Dans ce roulement, la craie va continuer à tourner dans le même sens, donc aussi la droite D qui va pénétrer dans l'angle de frottement et pourra finalement arriver à rattraper le point ω, ce qui donnera un échappement total du roulement; c'est le premier bond du morceau de craie.

7. Dans la théorie du frottement de glissement qu'on trouve exposée dans tous les traités, on admet que si la réaction normale du contact vient à s'annuler en devenant négative, le contact, supposé unilatéral, cesse immédiatement.

Ce fait est exact. Nous avons vu en effet qu'il y avait échappement du roulement ou du glissement quand le point ω ou γ venait traverser le point O. Mais on admet, sans même la formuler, la réciproque de cette propriété, c'est-à-dire que l'échappement ne peut avoir lieu que si la réaction normale change de signe, et là on se trouve en présence d'un résultat faux puisque nous avons vu des échappements de roulement se produisant alors que la réaction normale était encore positive.

On peut formuler le résultat exact sous la forme suivante :

Pour qu'il y ait échappement pendant le roulement, il faut et il suffit que la composante, normale à la droite D, *de la réaction s'annule pour devenir*

négative, c'est-à-dire que la quantité

$$Y(K^2 - a^2) - abX$$

s'annule en changeant de signe.

Pour qu'il y ait échappement pendant le glissement il faut et il suffit que la réaction normale Y *s'annule en changeant de signe.*

Dans ce dernier cas, il ne faut pas parler de la composante normale à D, car si celle-ci vient à s'annuler sans que Y s'annule, il y a, non pas échappement, mais transformation de M_g en M_R par choc.

[R1d]

NOTE GÉOMÉTRIQUE SUR UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE COMPOSITION DES VITESSES ET LE THÉORÈME DE CORIOLIS ;

PAR M. LÉON POMEY.

Soient T un trièdre fixe de sommet O, S un corps solide animé par rapport à T d'un mouvement donné, et M un mobile animé d'un mouvement donné par rapport à S (*mouvement relatif*). On veut déduire de ces deux mouvements connus le mouvement de M, qui en résulte par rapport à T (*mouvement absolu*). Pour y parvenir, nous nous appuierons sur ce *lemme*.

THÉORÈME DE COMPOSITION DES VITESSES GÉNÉRALISÉ. — *Étant donné un mobile* μ, *dont la position par rapport à* T *dépend uniquement de celle de* M *et qui est immobile si l'on suppose que* M *l'est, la*

vitesse $v_a(\mu)$, *dite* absolue, *de* μ *par rapport à* T *à l'instant* t (*dans le mouvement de* μ *qui correspond au mouvement absolu de* M) *est la somme géométrique de deux autres vitesses :* 1° *celle* $\rho(\mu)$, *que* μ *aurait dans son mouvement correspondant au seul mouvement relatif de* M *par rapport à* S, *dans l'hypothèse où* S *est immobilisé à l'instant* t; 2° *celle* $\eta(\mu)$, *que* μ *aurait au contraire dans l'hypothèse du seul mouvement d'entraînement de* M, *quand on suppose* M *fixé invariablement à* S *à partir de l'instant* t.

Soient, en effet, P et P_1 les positions de M aux instants t et $t+dt$ dans la première hypothèse. Soient P' et P'_1 les positions à l'instant $t+dt$ des points P et P_1 quand on les considère comme fixés invariablement au corps S. Les déplacements élémentaires de M dans son mouvement absolu, dans son seul mouvement relatif (1re hypothèse) et dans son seul mouvement d'entraînement (2e hypothèse) sont donc respectivement $\overline{PP'_1}$, $\overline{PP_1}$, $\overline{PP'}$. Appelons $\overline{\mu\mu'_1}$, $\overline{\mu\mu_1}$ et $\overline{\mu\mu'}$ les déplacements correspondants de μ. En divisant par dt l'égalité géométrique $\overline{\mu\mu'_1} = \overline{\mu\mu_1} + \overline{\mu_1\mu'_1}$, et faisant tendre dt vers zéro, on voit sans peine, suivant un raisonnement bien connu, que l'on obtient à la limite l'égalité géométrique annoncée

$$v_a(\mu) = \rho(\mu) + \eta(\mu). \tag{1}$$

Théorème de composition des vitesses. — Si, en particulier, μ est le point M lui-même, $v_a(M)$, $\rho(M)$ et $\eta(M)$ deviennent respectivement la *vitesse absolue*

$$\overline{v_a} = \lim \frac{PP'_1}{dt},$$

la *vitesse relative*

$$\overline{v_r} = \lim \frac{PP_1}{dt}$$

de M, et la vitesse

$$v_c = \lim \frac{PP'}{dt}$$

du point P de S avec lequel M coïncide à l'instant t; et l'égalité (1) devient

$$(2) \qquad \overline{v_a} = \overline{v_r} + \overline{v_c}.$$

Théorème de Coriolis. — L'accélération absolue $\overline{\gamma_a}$ de M étant, par définition, la dérivée géométrique $\frac{d\overline{v_a}}{dt}$ du vecteur v_a, on est conduit à dériver géométriquement (2); il vient

$$(3) \qquad \overline{\gamma_a} = \frac{d\overline{v_r}}{dt} + \frac{d\overline{v_c}}{dt}.$$

Pour interpréter ces deux derniers termes, menons les vecteurs $\overline{OR}$ et $\overline{OK}$ équipollents à $\overline{v_r}$ et $\overline{v_c}$; ces deux termes représentent respectivement les vitesses absolues des points R et K. Il est donc naturel d'appliquer à chacune le lemme; d'où

$$(4) \qquad \frac{d\overline{v_r}}{dt} = \rho(R) + \eta(R), \qquad \frac{d\overline{v_c}}{dt} = \rho(K) + \eta(K).$$

Mais, par définition, l'*accélération relative* $\overline{\gamma_r}$ de M est la dérivée géométrique de $\overline{v_r}$ dans la première hypothèse; c'est donc le vecteur $\rho(R)$; et son *accélération d'entraînement* $\overline{\gamma_c}$ est son accélération dans la deuxième hypothèse, c'est-à-dire la dérivée géométrique de la vitesse v_c de son point coïncident P, c'est donc $\eta(K)$. Ainsi donc

$$(5) \qquad \rho(R) = \overline{\gamma_r}, \qquad \eta(K) = \overline{\gamma_c}.$$

D'autre part, on voit facilement que

$$(6) \qquad \eta_1(R) = \eta(K).$$

En effet, la différence géométrique entre le vecteur $\frac{\overline{OP_1} - \overline{OP}}{dt}$ et sa limite $\overline{v_r}$ est un vecteur qui tend vers zéro avec dt et que l'on peut, par suite, représenter par $\overline{\alpha}\,dt$; d'où

$$(7) \qquad \overline{v_r} = \frac{\overline{OP_1} - \overline{OP}}{dt} - \overline{\alpha}\,dt.$$

Appelons $\overline{v_r'}$ la position à l'instant $(t + dt)$ du vecteur $\overline{v_r}$ considéré comme fixé invariablement au corps S pendant le mouvement de celui-ci (2e hypothèse); $\overline{v_r'}$ est égale à $\lim \frac{\overline{P'P_1'}}{dt}$ quand P_1' tend vers P' pour $dt = 0$.

Appelons enfin $\overline{v_{c_1}}$ la vitesse du point P_1 quand on le considère comme fixé à S, c'est-à-dire $\lim \frac{P_1P_1'}{dt}$. On pourra poser comme ci-dessus

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{v_r'} &= \frac{\overline{OP_1'} - \overline{OP'}}{dt} + \overline{\alpha'}\,dt, \\ \overline{v_c} &= \frac{\overline{OP'} - \overline{OP}}{dt} + \overline{\beta}\,dt, \qquad \overline{v_{c_1}} = \frac{OP_1' - OP_1}{dt} + \overline{\beta_1}\,dt. \end{aligned} \right.$$

De (7) et (8) on déduit

$$(9) \qquad \frac{\overline{v_r'} - \overline{v_r}}{dt} - (\overline{\alpha'} - \overline{\alpha}) = \frac{\overline{v_{c_1}} - \overline{v_c}}{dt} - (\overline{\beta_1} - \overline{\beta}).$$

Les vecteurs $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\alpha'}$, $\overline{\beta_1}$ étant fonctions continues de t, $(\alpha' - \alpha)$ tend vers zéro avec dt quand P' et P_1' tendent vers P et P_1, et de même $(\beta_1 - \beta)$, pourvu que P_1 et P_1' tendent vers P et P'. La limite du premier

membre de (9) dans la première hypothèse, c'est-à-dire $\eta_1(R)$ est donc bien égale à la limite du second membre dans la deuxième hypothèse, c'est-à-dire $\rho(K)$.

Il suffit donc d'évaluer directement une de ces deux vitesses [1] $\eta_1(R)$ ou $\rho(K)$. Or $\eta_1(R)$, par exemple, est la vitesse de R dans la deuxième hypothèse, c'est-à-dire quand le vecteur $\overline{OR}$ subit simplement une rotation instantanée égale à celle du corps S, laquelle est représentée à l'instant t par un vecteur $\overline{O\omega}$ connu. Donc $\eta_1(R)$ est le moment de $\overline{O\omega}$ par rapport à R ou

$$\eta_1(R) = (\overline{O\omega}, R). \tag{10}$$

---

[1] On pourrait aussi bien calculer directement $\rho(K)$: Appelons V_A la vitesse absolue d'un point quelconque A de S et $\overline{A\Omega}$ un vecteur équipollent à $\overline{O\omega}$. On sait que l'on a dans le mouvement d'un solide S

$$v_c = V_A + (\overline{A\Omega}, P).$$

Or $\rho(K)$ est la dérivée géométrique de $\overline{v_c}$ dans la deuxième hypothèse, c'est-à-dire quand on suppose V_A et $\overline{A\Omega}$ invariables. Cherchons donc la limite de $\frac{v_{c_1} - v_c}{dt}$ dans ces conditions; v_{c_1} est égale à $\overline{V_A} + (\overline{A\Omega}, P_1)$. Donc $\overline{P\omega_1}$ étant mené équipollent à $\overline{A\Omega}$, $\rho(K)$ est la limite du moment $\frac{(\overline{P\omega_1}, P)}{dt}$. Mais puisque $\overline{v_r}$ est

$$\lim \frac{\overline{PP_1}}{dt},$$

on voit, en appelant r l'extrémité de $\overline{v_r}$, que l'on a bien

$$\rho(K) = (\overline{P\omega_1}, r) = (O\omega, R).$$

Remarquons, d'autre part, que $\overline{\gamma_c}$ ou $\eta_1(K)$ est au contraire la dérivée géométrique de $\overline{v_c}$, quand on suppose V_A et $\overline{A\Omega}$ seuls variables. On a donc, en posant $\frac{dV_A}{dt} = \gamma_A$,

$$\overline{\gamma_c} = \gamma_A + \left(\frac{d\overline{A\Omega}}{dt}, P\right).$$

En portant ces diverses valeurs dans (3), on obtient finalement l'égalité géométrique

$$(11) \qquad \overline{\gamma_a} = \overline{\gamma_r} - \overline{\gamma_e} + 2(\overline{O\omega}, R),$$

qui est l'expression condensée du *théorème de Coriolis*.

C. Q. F. D.

Généralisation du théorème de Coriolis. — Si l'on avait dérivé (1) au lieu de (2), on aurait obtenu pour le point μ, en raisonnant comme ci-dessus, la relation suivante :

$$(12) \qquad \overline{\gamma_a}(\mu) = \overline{\gamma_2}(\mu) - \overline{\gamma_1}(\mu) - 2(\overline{O\omega}, \rho),$$

$\overline{\gamma_a}(\mu)$ étant l'accélération absolue de μ; $\overline{\gamma_2}(\mu)$, $\overline{\gamma_1}(\mu)$ ses accélérations dans les première et deuxième hypothèses, et ρ étant l'extrémité du vecteur $\rho(\mu)$. Quand μ est le point M, on retombe sur la relation (11).

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME XX, 4e SÉRIE, 1920.)

La classification adoptée est celle de l'Index du *Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*

Analyse mathématique.

		Pages.
A5b	Sur un défaut de la méthode d'interpolation de Lagrange, par M. *Maurice Fréchet*	241
B12c	Deux Notes de Géométrie vectorielle, par M. *René Garnier*	341
C1f	Sur le maximum et le minimum des fonctions de deux variables, par M. *G. Valiron*	41
H2b	Sur une classe d'équations différentielles qui admettent des intégrales singulières, par M. *E. Goursat*	372
J2f	Sur l'application de la loi de Gauss à la position probable d'un point dans le plan ou dans l'espace, par M. *J. Haag*	121, 161 et 201

Géométrie.

K¹9dα	Sur les polygones harmoniques d'un nombre pair de côtés et sur certains cercles du triangle, par M. *V. Thébault*	94
K¹9d	Sur un système remarquable de cinq droites, par M. *Raoul Bricard*	209
K¹16b	Sur les contacts des sphères tangentes à quatre plans, par M. *V. Thebault*	55
M¹3g	Lieu des foyers ordinaires de courbes algébriques d'un faisceau tangentiel ou ponctuel, par M. *T. Lemoyne*	14
M²3aα	Sur une propriété caractéristique du cylindre et du cylindroïde, par M. *R. Harmegnies*	178

Pages.

M¹5 Sur la cubique à point double, par M. *N. Altshiller-Court* 424

M¹8a Sur certaines relations qui existent entre l'épicycloïde et l'hypocycloïde à trois rebroussements, par M. le capitaine *J.-A. Moren* 479

M²4i Simple remarque sur la cyclide de Dupin, par M. *M. d'Ocagne* 13

N¹1a Un théorème général sur les complexes, par M. *Cl. Servais* 347

O¹2q Sur un théorème de Cornu relatif aux caustiques, par M. *T. Lemoyne* 142

O¹2b Sur les tangentes aux trajectoires des sommets d'un triangle qui se déforme dans un plan, par M. *R. Goormaghtigh* 100

O¹3gα Rayon de courbure de la courbe qui est le lieu des centres des sphères osculatrices à une courbe gauche, par M. *G. Fontené* 214

O¹3b Courbes gauches liées par échange des tangentes et des binormales. Les formules de Frenet sont intuitives, par M. *G. Fontené* .. 185

O¹4h, O¹5f Équation angulaire d'un conoïde droit. Application au cylindroïde envisagé dans ses rapports avec la distribution des courbures autour d'un point d'une surface, par M. *M. d'Ocagne* 51

O¹5c Note sur les congruences de normales, par M. *Bayard* 295

O¹5h Sur la surface dont tous les points sont des ombilics, par M. *R. Harmegnies* 180

O¹6k Surfaces de translation applicables l'une sur l'autre, par M. *Bertrand Gambier*. 281, 321 et 361

O¹6s Étude des surfaces de translation de Sophus Lie, par M. *Bertrand Gambier* ..... 401 et 454

P¹2b Transformation polaire interaxiale, par M. *M. d'Ocagne* 249

P¹3a Démonstration géométrique du théorème de Liouville sur le groupe isogonal de transformations dans l'espace, par M. *A. Lévêque* .. 356

Mathématiques appliquées.

R1d Note géométrique sur une généralisation du théorème de composition des vitesses et le théorème de Coriolis, par M. *Léon Pomey* .. 496

Pages.

R1e Sur des systèmes articulés, par M. *Raoul Bricard* 395

R8e Exposé élémentaire d'une théorie rigoureuse des liaisons finies unilatérales, par M. *Et. Delassus* ..... 1 et 81

R9a Considérations sur le frottement de glissement, par M. *Ét. Delassus* 485

Questions d'examens et de concours.

Certificats de calcul différentiel et intégral 17, 60, 105
Certificats d'Analyse supérieure 222
Certificats de Géométrie supérieure 307
Certificats de Mécanique physique et expérimentale 311
Certificats de Mécanique appliquée 314
Certificats d'Astronomie 149
Certificats de Physique mathématique 151
Agrégation des Sciences mathématiques (juillet 1919). Problèmes de calcul différentiel et intégral 260
A propos de la composition de calcul différentiel et intégral du concours d'Agrégation de juillet 1919, par M. *R. Garnier*. 263
Concours d'admission à l'École Polytechnique en 1920 316
Agrégation des Sciences mathématiques (concours de 1920). Sujets de composition 435
Concours spécial d'Agrégation de 1919. Solution du problème de Mécanique, par M. *Et. Delassus* 297

Correspondance.

F. Balitrand : A propos de la transformation par tangentes orthogonales 59
G. Fontené : Sur certaines courbes gauches 188

Bibliographie.

H. Brocard et T. Lemoyne : Courbes géométriques remarquables (courbes spéciales) planes et gauches, t. I. Compte rendu par M. *R. B.*. 147

Divers.

Charles-Ange Laisant (1841-1920) : par M. *Raoul Bricard* .. 449
Chronique 31, 73, 103, 145, 189, 220-275, 359
Avis 121

Questions proposées.

Pages.
2434 39
2435 80
2436 et 2437 120
2438 et 2439 160
2440 à 2442 200
2443 et 2444 240
2445 à 2448 279
2449 à 2451 319

Solutions de questions proposées.

893, par M. *R. B.* 193
1784, par M. *R. Bouvaist* 35
1785, par M. *L. Varchon* 36
1811, par M. *M. Faucheux* 38
1820, par M. *R. Bouvaist* 153
1821, par M. *M.-F. Egan* 153
1825, par M. *R. Bouvaist* 117
1886, par M. *R. B.* 76
1890, par M. *R. B.* 154
2010, par M. *R. B.* 155
2038, par M. *R. Bouvaist* 77
2039, par M. *L. Poli* 79
2045, par M. *R. B.* 195
2064 et 2065, par M. *H. de Montille* 156
2314, par M. *J. Lemaire* 118
2315, par M. *J. Lemaire* 195
2316, par M. *R. Bouvaist* 199
2317, par M. *R. Bouvaist* 236
2318, par M. *M. Faucheux* 238
2320, par un *Abonné* 239
Errata 40, 400

TABLE ALPHABÉTIQUE DES AUTEURS.

(TOME XX, 4e SÉRIE, 1920.)

Un Abonné, 239.
N. Abramesco, 120.
N. Altshiller-Court, 424.

Bayard, 295.
R. Bouvaist, 35, 77, 117, 153, 199, 236.
R. Bricard, 76, 154, 155, 193, 195, 200, 209, 240, 279, 280, 319, 320, 395, 449.

C. Convers, 240.

Et. Delassus, 1, 81, 297, 485.
M.-F. Egan, 153.
M. Faucheux, 38, 238.
G. Fontené, 80, 185, 214, 279.
M. Fréchet, 241.

B. Gambier, 281, 321, 361, 401, 454.
R. Garnier, 263, 341.
R. Goormaghtigh, 100.
E. Goursat, 372.

J. Haag, 121, 161, 201.
R. Harmegnies, 178, 180.

J. Lemaire, 118, 195.
T. Lemoyne, 14, 142.
A. Lévêque, 356.

L. Maloue, 120.
J.-A. Moren, 479.

M. d'Ocagne, 13, 39, 51, 160, 249.

L. Poli, 79, 160.
L. Pomey, 496.

C.-L. Servais, 347.

V. Thébault, 55, 94, 200, 320.

G. Valiron, 41.
L. Varchon, 36.

61456—21 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS et Cie, quai des Grands Augustins, 55

QA
1
N8
v.79

Nouvelles annales
de mathématiques

Physical &
Applied Sci.
Serials

Math

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY